

Prom. Nr. 3772

**Analytische Störungstheorie  
im Dreikörperproblem mit Hilfe von  
regularisierenden Variablen**

Von der  
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN  
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

zur Erlangung  
der Würde eines Doktors der Mathematik  
genehmigte

PROMOTIONSARBEIT

vorgelegt von

**MAX RÖSSLER**

dipl. Math. ETH  
von St. Gallen-Tablat

Referent: Herr Prof. Dr. E. Stiefel  
Korreferent: Herr Prof. Dr. H. Rutishauser

Juris Druck + Verlag Zürich  
1966

Meinen Eltern  
in Dankbarkeit gewidmet

## VORWORT

Die in der klassischen Himmelsmechanik benutzten Reihenentwicklungen der Störungen setzen fast immer kleine Exzentrizitäten voraus. Die Bahnen von künstlichen Himmelskörpern sind dagegen oft stark exzentrisch und können sogar Kollisionsbahnen sein. Herr Prof. Dr. E. Stiefel hat mich daher angeregt, zu untersuchen, wie mit Hilfe der Einführung von regularisierenden Variablen auch für grosse Exzentrizitäten brauchbare Reihenentwicklungen konstruiert werden können.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Stiefel herzlich danken; seine positive Kritik und seine zahlreichen wertvollen Ratschläge haben das gute Gelingen dieser Arbeit erst ermöglicht. Ebenso bin ich Herrn Professor Dr. H. Rutishauser sehr dankbar für das Interesse, das er der Arbeit entgegengebracht hat. Schliesslich gilt mein Dank dem Rechenzentrum der ETH für die Ermöglichung der Benutzung der Rechenanlage.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	9
I. Analytische Störungstheorie auf Grund der Methode der Regularisierung	11
I.1. Problemstellung	11
I.2. Regularisierung	12
I.3. Bewegung des Störkörpers	18
I.4. Bewegung des Mobils. Störungsdifferentialgleichungen	20
II. Entwicklung der Störungsterme	25
II.1. Untersuchung der Störungsterme	25
II.2. Entwicklung in Fourierreihen	28
II.3. Konvergenz der Potenzreihenentwicklungen der Fourierkoeffizienten	43
II.4. Konvergenz der Fourierreihenentwicklungen	46
III. Beispiele	54
III.1. Anzahl der mitzunehmenden Glieder	54
III.2. Störung der Vesta durch Jupiter	56
III.3. Einfluss der Exzentrizität auf die Konvergenz	66
Literaturverzeichnis	71

## EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit behandelt die analytische Störungstheorie im räumlichen Dreikörperproblem auf Grund der Regularisierungsmethoden, die P. Kustaanheimo und E. Stiefel in [1] \* entwickelt haben. Wie in der klassischen Theorie erscheint die Lösung als Fouriersche Doppelreihe, wobei die beiden Argumente die Stellungen von Mobil und Störkörper in ihren ungestörten Keplerbewegungen fixieren.

Im ersten Teil wird die Regularisierung kurz hergeleitet und angepasst an unsere besondern Bedürfnisse. Der zweite Teil enthält die Beschreibung der Entwicklung der Störungsterme unter Verwendung von Variablen, die schon von Hansen [2] vorgeschlagen wurden. Konvergenzbetrachtungen zeigen, dass die Entwicklungen auch für stark exzentrische Bahnen gut konvergieren, im Gegensatz zu den in der klassischen Theorie üblichen Entwicklungen nach den mittleren Anomalien. Insbesondere gestattet die Regularisierungsmethode auch die analytische Erfassung von Kollisionsbahnen; die bisherigen Theorien einschliesslich der Hansenschen Methode konnten dies nicht leisten\*\*.

---

\* Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis.

\*\* Es ist jedoch zu bemerken, dass die analytische Methode von Encke (siehe Enzyklopädie d. math. Wiss., VI, 2, A, S. 777) bei Verwendung der exzentrischen Anomalie als unabhängige Variable die analytische Störungstheorie von Kollisionsbahnen auch erlauben würde. Sie hat jedoch zwei Nachteile gegenüber unseren Methoden. Erstens müssen die Bewegungsgleichungen linearisiert werden, und zweitens haben die entstehenden linearen Differentialgleichungen Singularitäten (obwohl alle ihre Lösungen regulär sind). Die Anzahl der Integrationen ist bei dieser modifizierten Encke-Methode dieselbe wie bei uns.

Der dritte Teil behandelt die numerischen Erfahrungen an Hand von Beispielen, die auf einer Rechenanlage CDC 1604 A gerechnet wurden. Ein Vergleich mit der Theorie von Leveau [3] für die Störung des Planetoiden Vesta durch Jupiter zeigt gute Uebereinstimmung.

# I. ANALYTISCHE STÖRUNGSTHEORIE AUF GRUND DER METHODE DER REGULARISIERUNG

## 1.1. Problemstellung

Wir betrachten drei Punktmassen, einen Zentralkörper mit der Masse  $M$ , ein Mobil mit verschwindender Masse und einen Störkörper der Masse  $m'$ , die sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz im Raum bewegen. Der Einfluss des Störkörpers auf die Bewegung des Mobils sei so klein, dass Störungsrechnung sinnvoll ist.

Der Zentralkörper sei dauernd im Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems  $x, y, z$ , das sich gegenüber einem Inertialsystem nur translatorisch bewegt. Der Störkörper sei zur Zeit  $t=0$  durch seine Anfangslage  $(x'_0, y'_0, z'_0)$  und Anfangsgeschwindigkeit  $(\dot{x}'_0, \dot{y}'_0, \dot{z}'_0)$  gegeben, analog das Mobil durch  $(x_0, y_0, z_0)$  und  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ . Wenn wir die Masseneinheiten so wählen, dass die Gravitationskonstante  $k=1$  wird, erhalten wir für die Differentialgleichungen unseres Dreikörperproblems

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{M}{r^3} \vec{r} - m' \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\vec{r}'}{r'^3} \right), \quad (1)$$

$$\ddot{\vec{r}}' = -\frac{M+m'}{r'^3} \vec{r}'. \quad (2)$$

Dabei bezeichnen  $\vec{r} = (x, y, z)$  den Radiusvektor des Mobils,  $r = |\vec{r}|$  den Abstand Mobil-Zentralkörper,  $\vec{r}' = (x', y', z')$  den Radiusvektor des Störkörpers,  $r' = |\vec{r}'|$  dessen Abstand vom Zentralkörper, ein Punkt die Ableitung nach der Zeit  $t$ .

Das Störungsglied in den Gleichungen (1) kann von einem zeitabhängigen Potential  $V$  abgeleitet werden; es ist nämlich

$$-m' \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\vec{r}'}{r'^3} \right) = \text{grad}_{\vec{r}} \left[ m' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \right) \right] = \text{grad } V. \quad (3)$$

## 1.2. Regularisierung

Um auch Mobilbahnen, die in die Nähe des Zentralkörpers gelangen oder einen Stoss mit diesem enthalten, ohne Schwierigkeiten behandeln zu können, transformieren wir in den Gleichungen (1) die Variablen  $t, x, y, z$  auf regularisierende Variable  $E, u_1, u_2, u_3, u_4$ , und zwar in Anlehnung an [1] durch die Definition

$$\begin{aligned}x &= u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\y &= 2(u_1 u_2 - u_3 u_4) \\z &= 2(u_1 u_3 + u_2 u_4)\end{aligned}\tag{4}$$

$$dt = r \cdot \sqrt{\frac{2}{M} \left( \frac{r}{4} + \sum_{j=1}^4 \left( \frac{du_j}{dE} \right)^2 \right)} \cdot dE$$

wobei

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

ist. Da die Zahl der neuen Variablen um 1 grösser ist als die der alten, ist die Transformation (4) nicht eindeutig, sondern enthält noch einen Freiheitsgrad. Die in der letzten Gleichung von (4) angeschriebene Zeittransformation ist, wie wir später sehen werden, nicht immer ausführbar; vorläufig wollen wir einfach formal damit rechnen.

Wir zeigen, dass mit (4) die Bewegungsgleichungen (1) in die 4 Differentialgleichungen übergehen

$$\frac{d^2 u_i}{dE^2} + \frac{1}{4} u_i = \frac{1}{2M} \left( \frac{r}{4} + \sum_{j=1}^4 \left( \frac{du_j}{dE} \right)^2 \right) \cdot \left( r \frac{\partial V}{\partial u_i} + 4 \frac{du_i}{dE} \cdot \sum_{j=1}^4 \frac{\partial V}{\partial u_j} \frac{du_j}{dE} \right)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

Den Beweis von (5) führt man am einfachsten mit Hilfe der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} = \frac{\partial \left( \frac{M}{r} \right)}{\partial u_i} - \frac{\partial V}{\partial u_i}, \quad (i=1,2,3,4), \quad (6)$$

wobei die kinetische Energie  $T$ ,  $\frac{M}{r}$  und  $V$  in Funktion der  $u_i$ ,  $\dot{u}_i$  ausgedrückt werden müssen. In [1] wird nämlich gezeigt, dass man die Technik der Lagrangeschen Gleichungen anwenden kann, obwohl 4 Lagekoordinaten  $u_i$  eingeführt werden.

Mittels (4) erhält man

$$\frac{\partial \left( \frac{M}{r} \right)}{\partial u_i} = - \frac{2M}{r^2} u_i,$$

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2 \cdot [(u_1 \dot{u}_1 - u_2 \dot{u}_2 - u_3 \dot{u}_3 + u_4 \dot{u}_4)^2 + (u_1 \dot{u}_2 + u_2 \dot{u}_1 - u_3 \dot{u}_4 - u_4 \dot{u}_3)^2 + (u_1 \dot{u}_3 + u_2 \dot{u}_4 + u_3 \dot{u}_1 + u_4 \dot{u}_2)^2].$$

Verwendet man die Freiheit in der Wahl der  $u_i$  dazu, die Nebenbedingung

$$u_4 \dot{u}_1 - u_3 \dot{u}_2 + u_2 \dot{u}_3 - u_1 \dot{u}_4 = 0 \quad (7)$$

zu erfüllen, so erhält man

$$T = 2r (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2);$$

$r$  ist als Abkürzung für  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$  zu verstehen.

Damit wird (6)

$$\frac{d}{dt} (4r \dot{u}_i) - 4u_i (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2) = - \frac{2M}{r^2} u_i + \frac{\partial V}{\partial u_i}. \quad (8)$$

Nun transformieren wir noch die Zeit

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{r \cdot \sqrt{\frac{2}{M} \left( \frac{r}{4} + \sum \left( \frac{du_j}{dE} \right)^2 \right)}} \cdot \frac{d}{dE}$$

setzen kurz

$$\sqrt{\frac{2}{M} \left( \frac{r}{4} + \sum \left( \frac{du_j}{dE} \right)^2 \right)} = \Gamma$$

und erhalten so aus (8) sukzessive

$$\frac{1}{r\Gamma} \frac{d}{dE} \left( 4r \frac{1}{r\Gamma} \frac{du_i}{dE} \right) - 4u_i \left( \frac{1}{r\Gamma} \right)^2 \cdot \sum \left( \frac{du_j}{dE} \right)^2 = -\frac{2M}{r^2} u_i + \frac{\partial V}{\partial u_i},$$

$$\frac{4}{r(\Gamma)^2} \frac{d^2 u_i}{dE^2} + \frac{4}{r\Gamma} \frac{d}{dE} \left( \frac{1}{\Gamma} \right) \cdot \frac{du_i}{dE} - \frac{4}{r^2(\Gamma)^2} u_i \sum \left( \frac{du_j}{dE} \right)^2 = -\frac{2M}{r^2} u_i + \frac{\partial V}{\partial u_i},$$

$$\frac{d^2 u_i}{dE^2} + \frac{1}{4} u_i = \Gamma \cdot \frac{d}{dE} \left( \frac{1}{\Gamma} \right) \frac{du_i}{dE} + \frac{r}{4} (\Gamma)^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial u_i} \quad (9)$$

Nun ist

$$\Gamma \cdot \frac{d}{dE} \left( \frac{1}{\Gamma} \right) = \frac{\sum \frac{du_j}{dE} \left( \frac{d^2 u_j}{dE^2} + \frac{1}{4} u_j \right)}{\frac{r}{4} + \sum \left( \frac{du_j}{dE} \right)^2}$$

$$(\Gamma)^2 = \frac{2}{M} \left( \frac{r}{4} + \sum \left( \frac{du_j}{dE} \right)^2 \right) ;$$

wenn man dies in (9) einsetzt, sieht man, dass auf beiden Seiten der Gleichungen Ausdrücke  $\frac{d^2 u_i}{dE^2} + \frac{1}{4} u_i$  auftreten. Um nach diesen Ausdrücken aufzulösen, multiplizieren wir (9) mit  $\frac{du_i}{dE}$  und summieren über  $i$ ; die dann entstehende Gleichung wird nach  $\sum \frac{du_i}{dE} \left( \frac{d^2 u_i}{dE^2} + \frac{1}{4} u_i \right)$  aufgelöst

$$\sum \frac{du_i}{dE} \left( \frac{d^2 u_i}{dE^2} + \frac{1}{4} u_i \right) = \frac{2}{M} \left( \frac{r}{4} + \sum \left( \frac{du_j}{dE} \right)^2 \right) \cdot \sum \frac{\partial V}{\partial u_i} \frac{du_i}{dE} \quad (10)$$

(10) in  $\sqrt{\frac{d}{dE}} \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right)$  von (9) eingesetzt ergibt genau die Gleichungen (5), welche damit bewiesen sind.

Obwohl die Störkörperbahn kleine Exzentrizität besitzen soll und somit keine Notwendigkeit der Regularisierung besteht, transformieren wir der Einheitlichkeit halber auch die Störkörper-Variablen analog zu (4) auf neue Variable  $E'$ ,  $u_1'$ ,  $u_2'$ ,  $u_3'$ ,  $u_4'$

$$\begin{aligned} x' &= u_1'^2 - u_2'^2 - u_3'^2 + u_4'^2 \\ y' &= 2(u_1' u_2' - u_3' u_4') \\ z' &= 2(u_1' u_3' + u_2' u_4') \end{aligned} \tag{11}$$

$$dt = r' \sqrt{\frac{2}{M+m'} \left( \frac{r'}{4} + \sum \left( \frac{du_i'}{dE'} \right)^2 \right)} \cdot dE' .$$

Da auf den Störkörper keine Störkräfte wirken, verschwinden die rechten Seiten der transformierten Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 u_i'}{dE'^2} + \frac{1}{4} u_i' = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4) . \tag{12}$$

Durch die Transformationen (4), (11) sind die Singularitäten  $\vec{r} = 0$ ,  $\vec{r}' = 0$  der ursprünglichen Bewegungsgleichungen wegtransformiert worden; (5) und (12) sind völlig regulär im Ursprung.

Zur Transformation der Bewegungsgleichungen gehört die Transformation der Anfangswerte. Wir behaupten, dass sich die Anfangswerte im Raum der  $u_i$  folgendermassen berechnen lassen.

$$\begin{aligned} \text{Falls } x_0 \geq 0: \quad u_{10} &= \sqrt{\frac{r_0 + X_0}{2}}, \quad u_{20} = \frac{y_0 u_{10}}{r_0 + X_0}, \quad u_{30} = \frac{z_0 u_{10}}{r_0 + X_0}, \quad u_{40} = 0, \\ \text{falls } x_0 < 0: \quad u_{20} &= \sqrt{\frac{r_0 - X_0}{2}}, \quad u_{10} = \frac{y_0 u_{20}}{r_0 - X_0}, \quad u_{40} = \frac{z_0 u_{20}}{r_0 - X_0}, \quad u_{30} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\left(\frac{du_i}{dE}\right)_0 = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2M}{r_0} - (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2)}} \begin{bmatrix} u_{10} & u_{20} & u_{30} \\ -u_{20} & u_{10} & u_{40} \\ -u_{30} & -u_{40} & u_{10} \\ u_{40} & -u_{30} & u_{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

(13) bestätigt man leicht durch Einsetzen in (4). (14) erhält man so:

$$\frac{du_i}{dE} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial \vec{r}}\right) \cdot \frac{d\vec{r}}{dE} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial \vec{r}}\right) \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \frac{dt}{dE}$$

Die Funktionalmatrix  $\left(\frac{\partial u_i}{\partial \vec{r}}\right)$  berechnen wir aus  $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right)$ . Nach (4) ist

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right) = 2 \cdot \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Definiert man nun  $\left(\frac{\partial u_i}{\partial \vec{r}}\right)$  bis auf den Faktor  $\frac{1}{4r}$  als die Transponierte von  $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right)$ , so folgt wegen der Orthogonalität der Matrix (15) nach Zeilen tatsächlich

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial \vec{r}}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

die Berechtigung für dieses Vorgehen wird in [1] in allen Einzelheiten nachgewiesen. Damit wird

$$\frac{du_i}{dE} = \frac{1}{2r} \frac{dt}{dE} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_4 \\ -u_3 & -u_4 & u_1 \\ u_4 & -u_3 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (16)$$

(16) erfüllt auch die Nebenbedingung (7).

In

$$\frac{dt}{dE} = r \cdot \sqrt{\frac{2}{M} \left( \frac{r}{4} + \sum \left( \frac{du_j}{dE} \right)^2 \right)} \quad (17)$$

stehen noch Ableitungen der  $u_i$  nach  $E$ . Um diese zu eliminieren, bilden wir die Summe der Quadrate der Gleichungen (16)

$$\sum \left( \frac{du_i}{dE} \right)^2 = \frac{1}{2M} \left( \frac{r}{4} + \sum \left( \frac{du_j}{dE} \right)^2 \right) \cdot (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

und lösen nach  $\sum \left( \frac{du_i}{dE} \right)^2$  auf

$$\sum \left( \frac{du_i}{dE} \right)^2 = \frac{r^2 \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{8M - 4r(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} \quad (18)$$

(18) setzen wir in (17) und (17) in (16) ein und erhalten so, wenn wir überall noch den Index 0 hinzufügen, die zu beweisenden Gleichungen (14).

Wenn

$$\frac{2M}{r} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 0 \quad (19)$$

ist, wird  $\frac{du_i}{dE}$  unendlich. Wegen (16) werden dann auch  $\frac{dt}{dE}$  und, da der Ausdruck  $\frac{r}{4} + \sum \left( \frac{du_j}{dE} \right)^2$  dort als Faktor auftritt, die rechten Seiten der Differentialgleichungen (5) unendlich. Die Zeittransformation in (4) ist daher nur zulässig, wenn (19) nicht erfüllt ist. Die linke Seite von (19) ist gleich der reziproken grossen Halbachse der Bahn, wie aus der klassischen Theorie der Kepler-Bewegung folgt; wir können also auch sagen, dass die Zeittransformation nur zulässig ist, solange die Halbachse nicht unendlich wird, d.h. die Bahn eine Parabel ist. Wir wollen uns im folgenden auf nichtparabolische Bahnen beschränken.

Für den Störkörper gehen die Rechnungen ganz analog; es sind einfach alle auftretenden Grössen ausser  $M$  und  $t$  mit Strichen zu versehen; statt  $M$  ist  $M+m'$  zu setzen.

### 1.3. Bewegung des Störkörpers

(12) lässt sich leicht lösen. Wir setzen an

$$u_i' = \alpha_i' \cos \frac{E'}{2} + \beta_i' \sin \frac{E'}{2}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (20)$$

Die Konstanten  $\alpha_i'$ ,  $\beta_i'$  erhält man aus  $u_{i0}'$ ,  $\left(\frac{du_i'}{dE'}\right)_0$ .

$$\begin{aligned} \alpha_i' &= u_{i0}' \cos \frac{E_0'}{2} - 2 \left(\frac{du_i'}{dE'}\right)_0 \sin \frac{E_0'}{2}, \\ \beta_i' &= u_{i0}' \sin \frac{E_0'}{2} + 2 \left(\frac{du_i'}{dE'}\right)_0 \cos \frac{E_0'}{2}. \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (21)$$

Dabei ist  $E_0' = E'(t=0)$  noch frei wählbar, da  $E'$  in (12) nur differentiell mit  $t$  verbunden ist. Wir wählen es so, dass  $E' = 0$  im Perizentrum der Bahn ist; es soll also sein

$$\begin{aligned} \frac{dr'}{dE'} &= \frac{d(\sum u_i'^2)}{dE'} = \\ &= \frac{d}{dE'} \left[ \frac{1}{2} (\sum \alpha_i'^2 + \sum \beta_i'^2) + \frac{1}{2} (\sum \alpha_i'^2 - \sum \beta_i'^2) \cdot \cos E' + \sum \alpha_i' \beta_i' \cdot \sin E' \right] \\ &= -\frac{1}{2} (\sum \alpha_i'^2 - \sum \beta_i'^2) \cdot \sin E' + \sum \alpha_i' \beta_i' \cdot \cos E' = 0, \\ \frac{d^2 r'}{dE'^2} &= -\frac{1}{2} (\sum \alpha_i'^2 - \sum \beta_i'^2) \cos E' - \sum \alpha_i' \beta_i' \sin E' \geq 0 \end{aligned}$$

für  $E' = 0$ , woraus folgt

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i' \beta_i' = 0, \quad \sum \alpha_i'^2 \leq \sum \beta_i'^2 \quad (22)$$

Aus (22) ergibt sich mittels (21)

$$E_0' = \arctan \frac{\sum u_{i0}' \left(\frac{du_i'}{dE'}\right)_0}{\sum \left(\frac{du_i'}{dE'}\right)_0^2 - \frac{1}{4} \sum u_{i0}'^2}$$

Es ist jener Zweig des arctan zu nehmen, welcher beim Einsetzen in (21)

$$\sum \alpha_i'^2 \leq \sum \beta_i'^2 \quad \text{ergibt.}$$

Nachdem  $\alpha_i'$ ,  $\beta_i'$  bestimmt sind, lassen sich die Koordinaten  $x', y', z'$  für einen Wert von  $E'$  aus (20), (11) berechnen. Zur Bestimmung der zu  $E'$  gehörigen Zeit  $t$  integrieren wir die letzte Gleichung von (11)

$$t = \int_{E_0'}^{E'} r' \sqrt{\frac{2}{M+m'} \left( \frac{r'}{4} + \sum \left( \frac{du_i'}{dE'} \right)^2 \right)} dE' \quad (23)$$

Die Wurzel in (23) ist konstant; das zeigt folgender Beweis

$$r' = \sum u_i'^2 = \frac{1}{2} (\sum \alpha_i'^2 + \sum \beta_i'^2) + \frac{1}{2} (\sum \alpha_i'^2 - \sum \beta_i'^2) \cos E' ,$$

$$\sum \left( \frac{du_i'}{dE'} \right)^2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} (\sum \alpha_i'^2 + \sum \beta_i'^2) - \frac{1}{2} (\sum \alpha_i'^2 - \sum \beta_i'^2) \cos E' \right] ,$$

$$\sqrt{\frac{2}{M+m'} \left( \frac{r'}{4} + \sum \left( \frac{du_i'}{dE'} \right)^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{2(M+m')} (\sum \alpha_i'^2 + \sum \beta_i'^2)} = \text{const.}$$

Daher wird aus (23)

$$t = \int_{E_0'}^{E'} \frac{1}{2} \left[ (\sum \alpha_i'^2 + \sum \beta_i'^2) + (\sum \alpha_i'^2 - \sum \beta_i'^2) \cdot \cos E' \right] \cdot \sqrt{\quad} dE'$$

$$t = \left( \frac{\sum \alpha_i'^2 + \sum \beta_i'^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot (M+m')^{-\frac{1}{2}} \left[ (E' - E_0') + \frac{\sum \alpha_i'^2 - \sum \beta_i'^2}{\sum \alpha_i'^2 + \sum \beta_i'^2} (\sin E' - \sin E_0') \right]. \quad (24)$$

Der Vergleich von (24) mit der klassischen Keplerschen Gleichung

$$\sqrt{\frac{M+m'}{a'^3}} \cdot t = E' - e' \cdot \sin E' - (E_0' - e' \cdot \sin E_0')$$

wobei  $E'$  die exzentrische Anomalie,  $a'$  die grosse Halbachse,  $e'$  die Exzentrizität bezeichnen, klärt die Bedeutung einiger unserer Variablen. Die regularisierende Zeit  $E'$  ist nichts anderes als die exzentrische Anomalie, ferner ist

$$a' = \frac{\sum \alpha_i'^2 + \sum \beta_i'^2}{2} ,$$

$$e' = \frac{-\sum \alpha_i'^2 + \sum \beta_i'^2}{\sum \alpha_i'^2 + \sum \beta_i'^2} .$$

Damit ist die Bewegung des Störkörpers bestimmt. Die Konstanten  $\alpha_i'$ ,  $\beta_i'$  können wir als die Bahnelemente der Störkörperbahn bezeichnen, analog den 6 Keplerschen Elementen.

#### 1.4. Bewegung des Mobils. Störungsdifferentialgleichungen

Die Bewegung des Mobils als Lösung von (5) spalten wir auf in eine ungestörte Bewegung, die durch Nullsetzen der rechten Seiten von (5) entsteht, d.h. den Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 \bar{u}_i}{dE_i^2} + \frac{1}{4} \bar{u}_i = 0 , \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (25)$$

genügt, und eine Störung, die durch die rechten Seiten von (5) entsteht. Wir wenden im folgenden für irgend eine Grösse  $g$ , die mit dem Mobil in Zusammenhang steht, die Bezeichnungen  $g$ ,  $\bar{g}$ ,  $\Delta g$  an mit

$$g = \bar{g} + \Delta g . \quad (26)$$

$g$  bezeichnet den gestörten Wert, d.h. den Wert aus (5),  $\bar{g}$  den ungestörten Wert, d.h. den Wert aus (25),  $\Delta g$  die Störung.

Da (25) dasselbe Differentialgleichungssystem ist wie (12), lassen sich die Resultate von 1.3. übertragen. Man erhält daher

$$\bar{u}_i = \bar{\alpha}_i \cdot \cos \frac{E_i}{2} + \bar{\beta}_i \cdot \sin \frac{E_i}{2} , \quad (i = 1, 2, 3, 4) , \quad (27)$$

wobei

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_i &= u_{i0} \cos \frac{E_0}{2} - 2 \left( \frac{du_i}{dE} \right)_0 \cdot \sin \frac{E_0}{2} , \\ \bar{\beta}_i &= u_{i0} \sin \frac{E_0}{2} + 2 \left( \frac{du_i}{dE} \right)_0 \cdot \cos \frac{E_0}{2} ,\end{aligned}\quad (28)$$

$$E_0 = \arctan \frac{\sum u_{i0} \left( \frac{du_i}{dE} \right)_0}{\sum \left( \frac{du_i}{dE} \right)_0^2 - \frac{1}{4} \sum u_{i0}^2}$$

(es ist jener Zweig des arctan zu nehmen, für den  $\sum \bar{\alpha}_i^2 \leq \sum \bar{\beta}_i^2$  ist) ,

$$t = \left( \frac{\sum \bar{\alpha}_i^2 + \sum \bar{\beta}_i^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[ (E - E_0) + \frac{\sum \bar{\alpha}_i^2 - \sum \bar{\beta}_i^2}{\sum \bar{\alpha}_i^2 + \sum \bar{\beta}_i^2} (\sin E - \sin E_0) \right]. \quad (29)$$

$E$  ist die exzentrische Anomalie der für  $t=0$  oskulierenden ungestörten Mobilbahn, und die grosse Halbachse  $\bar{a}$  und die Exzentrizität  $\bar{e}$  sind gegeben durch

$$\bar{a} = \frac{\sum \bar{\alpha}_i^2 + \sum \bar{\beta}_i^2}{2} , \quad (30)$$

$$\bar{e} = \frac{-\sum \bar{\alpha}_i^2 + \sum \bar{\beta}_i^2}{\sum \bar{\alpha}_i^2 + \sum \bar{\beta}_i^2} . \quad (31)$$

In den regularisierenden Koordinaten kann auch der Abschuss des Mobils vom Zentralkörper behandelt werden. Wegen der unendlichen Anfangsgeschwindigkeit versagen dann aber die Formeln (14) für die Berechnung der  $\left( \frac{du_i}{dE} \right)_0$ . Es ist zweckmässig, in diesem Fall als Ersatz für die Anfangsgeschwindigkeit die Koordinaten  $(\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{z}_A)$  des Apozentrums der ungestörten Bahn vorzugeben. Dieses Verfahren empfiehlt sich auch, wenn das Mobil ganz in der Nähe des Zentralkörpers mit sehr grosser Geschwindigkeit abgeschossen wird, da die Berechnung der  $\left( \frac{du_i}{dE} \right)_0$  nach (14) wegen der Stellenauslöschung im Ausdruck  $\frac{2M}{r_0} - (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2)$  dann ungenau wird.

Die  $\bar{u}_{iA}$  berechnet man analog zu (13), indem dort überall der Index  $O$  durch den Index  $A$  ersetzt wird. Wenn man berücksichtigt, dass im Apozentrum  $E = \pi$  ist, erhält man aus (27)

$$u_{i0} = \bar{\alpha}_i \cdot \cos \frac{E_0}{2} + \bar{\beta}_i \cdot \sin \frac{E_0}{2} \quad ,$$
$$\bar{u}_{iA} = \bar{\beta}_i \quad ,$$

und daraus

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{\cos \frac{E_0}{2}} \left( u_{i0} - \bar{u}_{iA} \cdot \sin \frac{E_0}{2} \right) \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$
$$\bar{\beta}_i = \bar{u}_{iA} \quad ,$$

wobei  $E_0$  wie vorher aus der Bedingung  $\sum \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_i = 0$  berechnet werden kann

$$E_0 = 2 \cdot \arcsin \frac{\sum u_{i0} \bar{u}_{iA}}{\sum \bar{u}_{iA}^2} \quad .$$

Wir wenden uns nun den Gleichungen (5) zu. Nach (26) werden die Lösungen so angesetzt

$$u_i = \bar{u}_i + \Delta u_i = (\bar{\alpha}_i + \Delta \alpha_i) \cos \frac{E}{2} + (\bar{\beta}_i + \Delta \beta_i) \sin \frac{E}{2} \quad . \quad (32)$$

$\Delta \alpha_i, \Delta \beta_i$  sind die Störungen, die die Elemente  $\alpha_i, \beta_i$  durch den Störkörper erleiden. Die Differentialgleichungen für  $\Delta \alpha_i, \Delta \beta_i$  sind leicht herzuleiten. Wir gehen von (5) aus, wobei wir die rechten Seiten abkürzend mit  $F_i$  bezeichnen

$$\frac{d^2 u_i}{dE^2} + \frac{1}{4} u_i = F_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad . \quad (33)$$

(32) in (33) eingesetzt ergibt

$$-\frac{1}{4}(\bar{\alpha}_i \cos \frac{E}{2} + \bar{\beta}_i \sin \frac{E}{2}) - \frac{d\Delta\alpha_i}{dE} \sin \frac{E}{2} + \frac{d\Delta\beta_i}{dE} \cos \frac{E}{2} + \frac{d^2\Delta\alpha_i}{dE^2} \cos \frac{E}{2} + \frac{d^2\Delta\beta_i}{dE^2} \sin \frac{E}{2} + \frac{1}{4}(\bar{\alpha}_i \cos \frac{E}{2} + \bar{\beta}_i \sin \frac{E}{2}) = F_i ,$$

$$-\frac{d\Delta\alpha_i}{dE} \sin \frac{E}{2} + \frac{d\Delta\beta_i}{dE} \cos \frac{E}{2} + \frac{d^2\Delta\alpha_i}{dE^2} \cos \frac{E}{2} + \frac{d^2\Delta\beta_i}{dE^2} \sin \frac{E}{2} = F_i$$

mit den Lösungen

$$\frac{d\Delta\alpha_i}{dE} = -2F_i \sin \frac{E}{2} , \quad \frac{d\Delta\beta_i}{dE} = 2F_i \cos \frac{E}{2} , \quad (34)$$

wie man durch Einsetzen leicht bestätigt.

Die rechten Seiten von (34) sind abhängig von den ungestörten Grössen, von  $\Delta\alpha_i, \Delta\beta_i, (i=1,2,3,4)$ , von  $t$  und von der unabhängigen Variablen  $E$ . Das sieht man aus (32), (4), (11), (24), (3), (5) und der Formel

$$\frac{du_i}{dE} = -\frac{1}{2}(\bar{\alpha}_i + \Delta\alpha_i) \sin \frac{E}{2} + \frac{1}{2}(\bar{\beta}_i + \Delta\beta_i) \cos \frac{E}{2} ; \quad (35)$$

wegen (34) ist nämlich  $\frac{d\Delta\alpha_i}{dE} \cos \frac{E}{2} + \frac{d\Delta\beta_i}{dE} \sin \frac{E}{2} = 0$  und daher  $\frac{du_i}{dE}$  unabhängig von  $\frac{d\Delta\alpha_i}{dE}, \frac{d\Delta\beta_i}{dE}$ .

Der in den  $F_i$  auftretende Faktor  $\frac{r}{4} + \sum (\frac{du_i}{dE})^2$  lässt sich einfacher schreiben. (32) und (35) ergeben

$$\frac{r}{4} + \sum \left(\frac{du_i}{dE}\right)^2 = \frac{1}{4} \left[ \sum (\bar{\alpha}_i + \Delta\alpha_i)^2 + \sum (\bar{\beta}_i + \Delta\beta_i)^2 \right]$$

Im folgenden wird die Grösse

$$a = \frac{1}{2} \left[ \sum (\bar{\alpha}_i + \Delta\alpha_i)^2 + \sum (\bar{\beta}_i + \Delta\beta_i)^2 \right] \quad (36)$$

eine grosse Rolle spielen; wir wollen sie "grosse Halbachse" nennen, da man zeigen kann, dass sie die grosse Halbachse der oskulierenden Keplerbahn ist. Da wir aber von dieser Eigenschaft keinen Gebrauch machen wollen, ist unter "Halbachse"  $a$  immer die rechte Seite von (36) zu verstehen.

Wegen der Abhängigkeit der rechten Seiten von (34) von der Zeit  $t = \bar{T} + \Delta t$  müssen wir zu (34) noch die Differentialgleichung

$$\frac{d\Delta t}{dE} = \frac{d(t-\bar{T})}{dE} = r \sqrt{\frac{2}{M} \left( \frac{r}{4} + \sum \left( \frac{du_i}{dE} \right)^2 \right)} - \frac{d\bar{T}}{dE} = r \sqrt{\frac{a}{M}} - \frac{d\bar{T}}{dE}$$

hinzunehmen, wo für  $\bar{T}$  der Ausdruck (29) einzusetzen ist. Damit erhalten wir ein vollständiges System von 9 Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Elementstörungen  $\Delta \alpha_i, \Delta \beta_i, (i=1,2,3,4)$  und die Zeitstörung  $\Delta t$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dE} \Delta \alpha_i &= -\frac{a}{2M} \left( r \frac{\partial V}{\partial u_i} + 4 \frac{du_i}{dE} \sum_{j=1}^4 \frac{\partial V}{\partial u_j} \frac{du_j}{dE} \right) \cdot \sin \frac{E}{2}, \\ \frac{d}{dE} \Delta \beta_i &= \frac{a}{2M} \left( r \frac{\partial V}{\partial u_i} + 4 \frac{du_i}{dE} \sum_{j=1}^4 \frac{\partial V}{\partial u_j} \frac{du_j}{dE} \right) \cdot \cos \frac{E}{2}, \quad (i=1,2,3,4) \\ \frac{d}{dE} \Delta t &= r \sqrt{\frac{a}{M}} - \bar{a}^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - \bar{e} \cdot \cos E), \end{aligned} \quad (37)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_i &= 0, \\ \Delta \beta_i &= 0, \quad (i=1,2,3,4) \\ \Delta t &= 0. \end{aligned}$$

## II. ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSTERME

### II.1. Untersuchung der Störungsterme

Hier befassen wir uns mit dem Differentialgleichungssystem (37); unter Störungstermen verstehen wir im folgenden immer die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen. (37) kann numerisch, z.B. nach Runge-Kutta, oder analytisch, d.h. durch Reihenentwicklungen der Störungsterme und deren analytische Integration, integriert werden. Die erste Methode wurde ausgeführt in [4]; die Genauigkeit hängt ab von den Anfangsbedingungen, der Ordnung des Verfahrens, der Schrittweite, den Rundungsfehlern. Die zweite Methode soll hier behandelt werden.

Bis jetzt haben wir nur parabolische Mobilbahnen ausgeschlossen, d.h. auch hyperbolische zugelassen (falls  $E$  komplexe Werte annimmt). Wir wollen uns nun aber auf elliptische Bahnen beschränken;  $E$  und die Elemente  $\alpha_i, \beta_i$ , ( $i=1,2,3,4$ ) sind dann reell, während sie für hyperbolische Bahnen imaginär werden. Für die Konvergenz von Reihenentwicklungen sind die Singularitäten massgebend. Leider hat (37) trotz der Regularisierung noch Singularitäten. Wohl ist ein Zusammenstoss Mobil-Zentralkörper nicht mehr singular, bei einem Zusammenstoss Mobil-Störkörper, d.h.  $\vec{r} = \vec{r}'$ , dagegen werden  $V$  und damit die Störungsterme unendlich. Die Gleichung für die Zeitstörung hat einen Verzweigungspunkt, wenn der Ausdruck unter der Wurzel 0 wird. Damit sich diese Singularitäten nicht störend auswirken, wollen wir einschränkende Annahmen treffen, indem die Entfernung des Mobils vom Störkörper und die grosse Halbachse  $a$  der Mobilbahn für alle Zeiten oberhalb von gewissen unteren Schranken  $\delta_1, \delta_2$  bleiben sollen. Für reelle  $E$  sind dann die ersten 8 Störungsterme von (37) beschränkt, und der Ausdruck unter der Wurzel im 9. Störungsterm ist grösser als  $\frac{\delta_2}{M}$ . Alle Singularitäten  $E_k$ , ( $k=1,2,\dots$ ) liegen daher ausserhalb eines Streifens der positiven Breite  $2 \varepsilon(\delta_1, \delta_2)$  längs der reellen Achse der  $E$ -Ebene.

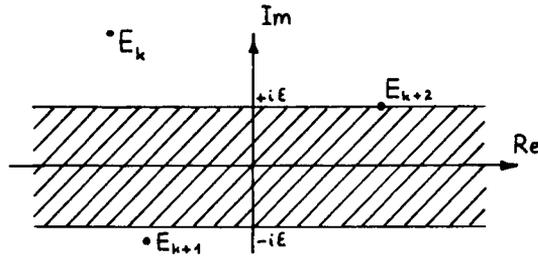


Fig. 1

Das Differentialgleichungssystem (37) ist unter diesen Annahmen also regulär im Streifen von Fig. 1.

Die Grösse von  $\epsilon$  schätzen wir an Hand eines Beispiels grob ab. Mobil und Störkörper sollen sich auf Kreisen mit den Radien  $r$  bzw.  $r'$  in derselben Ebene um den Zentralkörper bewegen; die Störung der Mobilbahn durch den Störkörper wird vernachlässigt, sodass  $a$  konstant bleibt und die Wurzel im 9. Störungsterm also nicht verschwindet. Es ist

$$u_1 = \sqrt{r} \cdot \cos \frac{\epsilon}{2}, \quad u_2 = \sqrt{r} \cdot \sin \frac{\epsilon}{2}, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 0,$$

$$u'_1 = \sqrt{r'} \cdot \cos \frac{\epsilon'}{2}, \quad u'_2 = \sqrt{r'} \cdot \sin \frac{\epsilon'}{2}, \quad u'_3 = 0, \quad u'_4 = 0.$$

Der Zusammenhang zwischen  $E$  und  $E'$  ist gegeben durch

$$E' = \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{M+m'}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot E + c;$$

$c$  ist eine reelle Konstante, die sich aus den Anfangsbedingungen ergibt.

(37) wird singular, wenn

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = 0$$

oder, anders geschrieben,  $x \pm iy = x' \pm iy'$  ist. Mit

$$x = u_1^2 - u_2^2 = r \cdot \cos E \quad ,$$

$$y = 2 u_1 u_2 = r \cdot \sin E \quad ,$$

und entsprechendem für den Störkörper erhält man

$$r \cdot e^{\pm iE} = r' \cdot e^{\pm iE'}$$

Wenn  $c$  variiert, läuft  $E$  auf einer Parallelen zur reellen Achse.

$$E = |\operatorname{Im}(E)| = \left| \frac{\log r - \log r'}{1 - \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M+m'}{M}\right)^{\frac{1}{2}}} \right|$$

Für ein typisches Störungsproblem ist entweder  $r \sim r'$  ( $\sim$  habe die Bedeutung "in der Grössenordnung von"),  $m' \ll M$  (Planetenprobleme), damit

$$E \sim \left| \frac{\log \frac{r'}{r}}{1 - \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{1}{2}}} \right| \sim \left| \frac{1 - \frac{r}{r'}}{1 - \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{1}{2}}} \right| \sim \frac{2}{3} \quad ,$$

oder es ist  $r \ll r'$  (Mondprobleme),

$$E \sim \log \frac{r'}{r}$$

Eine Entwicklung der Störungen in gewöhnliche Potenzreihen nach  $E$  um einen Punkt der reellen Achse herum konvergiert nur für  $|E| < \epsilon$  und ist deshalb höchstens brauchbar, wenn  $r \ll r'$  ist und die Bewegung des Mobils nur für kurze Zeit betrachtet wird.

Nach K. Sundman [5] und H. Poincaré kann der Streifen von Fig. 1 durch die konforme Abbildung

$$E = \frac{2\epsilon}{\pi} \cdot \log \frac{1+F}{1-F} \tag{38}$$

auf den Einheitskreis abgebildet werden. Entwickelt man nun in Potenzreihen nach  $F$ , so erhält man eine für alle Zeiten konvergente Darstellung der Bewegung des Mobils, da  $E \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ . Wie aber D. Belorizky [6] am Beispiel des Lagrange-Dreiecks gezeigt hat, besitzt die Transformation (38) im allgemeinen nur theoretische Bedeutung; die Konvergenz ist nämlich auch für relativ kleine  $E$  bereits so schlecht, dass man viel zu viele Glieder mitnehmen müsste.

### 11.2. Entwicklung in Fourierreihen

Da bisher keine praktisch anwendbare Entwicklung der Störungen bekannt ist, die für alle Zeiten konvergiert, geht das Bestreben dahin, eine zwar nur in einem endlichen Bereich  $-E_{max} < E < E_{max}$  konvergente Entwicklung zu konstruieren, die dafür aber in diesem Bereich rasch konvergiert. Eine solche Entwicklung soll im folgenden dargestellt werden. Sie macht sich, wie fast alle analytischen Störungsrechnungen der Himmelsmechanik (vgl. [7]), die Periodizitätseigenschaften der Störungen zunutze.

Wir bezeichnen die Störungsterme in (37) mit

$$f_k = f_k(\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3, \Delta\alpha_4, \Delta\beta_1, \Delta\beta_2, \Delta\beta_3, \Delta\beta_4, \Delta t, E), \quad (k=1, 2, \dots, 9).$$

Unser Differentialgleichungssystem (37) lässt sich dann schreiben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dE} \Delta\alpha_1 &= f_1(\Delta\alpha_1, \dots, \Delta\beta_4, \Delta t, E) , \\ \frac{d}{dE} \Delta\alpha_2 &= f_2(\Delta\alpha_1, \dots, \Delta\beta_4, \Delta t, E) , \\ &\vdots \\ \frac{d}{dE} \Delta\beta_4 &= f_8(\Delta\alpha_1, \dots, \Delta\beta_4, \Delta t, E) , \\ \frac{d}{dE} \Delta t &= f_9(\Delta\alpha_1, \dots, \Delta\beta_4, *, E) . \end{aligned} \tag{39}$$

Das Zeichen \* in  $f_9$  soll andeuten, dass  $f_9$  unabhängig von  $\Delta t$  ist; das stellt man in (37) leicht fest.

Nun denken wir uns die  $f_k$ , ( $k=1, \dots, 9$ ) in MacLaurin-Reihen nach den Störungen  $\Delta\alpha_i, \Delta\beta_i, \Delta t$  entwickelt. Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir dabei die Bezeichnung  $\vec{\Delta} = (\Delta_1, \dots, \Delta_9) = (\Delta\alpha_1, \dots, \Delta\beta_4, \Delta t)$  ein. Es ist dann

$$f_k(\vec{\Delta}, E) = f_k(\vec{0}, E) + \sum_{i=1}^9 \frac{\partial f_k}{\partial \Delta_i} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot \Delta_i + \sum_{i,j=1}^9 \frac{\partial^2 f_k}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot \frac{\Delta_i \Delta_j}{2!} + \dots$$

( $k=1, \dots, 8$ ) (40)

$$f_9(\vec{\Delta}, E) = \sum_{i=1}^9 \frac{\partial f_9}{\partial \Delta_i} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot \Delta_i + \sum_{i,j=1}^9 \frac{\partial^2 f_9}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot \frac{\Delta_i \Delta_j}{2!} + \dots$$

Die Vereinfachungen für  $f_9(\vec{\Delta}, E)$  ergeben sich, weil  $f_9(\vec{0}, E) = 0$  und  $f_9$  unabhängig von  $\Delta t$  ist.

Nun lösen wir (39) durch ein iteratives Verfahren. Zunächst setzen wir für  $f_k(\vec{\Delta}, E)$ , ( $k=1, \dots, 8$ ) das nur von  $E$  abhängige Glied  $f_k(\vec{0}, E)$  der Entwicklung (40) ein. Durch Integration von  $f_k(\vec{0}, E)$  erhalten wir eine erste Approximation der Elementenstörungen  $\Delta\alpha_i, \Delta\beta_i$ , ( $i=1, 2, 3, 4$ ), die wir mit dem Index 1 versehen und als Störungen 1. Ordnung bezeichnen

$$(\Delta_k)_1 = \int_{E_0} f_k(\vec{0}, E) dE, \quad (k=1, \dots, 8) \quad (41)$$

Daraus berechnen wir eine erste Approximation der Zeitstörung, indem wir in der Entwicklung (40) von  $f_9$  nur die in  $\Delta_k$  linearen Glieder berücksichtigen und für die  $\Delta_k$ , ( $k=1, \dots, 8$ ) die eben berechneten  $(\Delta_k)_1$  einsetzen

$$(\Delta_9)_1 = \int_{E_0} \sum_{i=1}^9 \frac{\partial f_9}{\partial \Delta_i} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot (\Delta_i)_1 dE \quad (42)$$

Nun berücksichtigen wir die linearen Glieder in der Entwicklung der  $f_k$ , ( $k=1, \dots, 8$ ) und bezeichnen die daraus berechneten Korrekturen als Störungen 2. Ordnung

$$(\Delta_k)_2 = \int_{E_0} \sum_{i=1}^9 \frac{\partial f_k}{\partial \Delta_i} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot (\Delta_i)_1 dE, \quad (k=1, \dots, 8) \quad (43)$$

Die Störungen 2. Ordnung in den linearen und die Störungen 1. Ordnung in den quadratischen Gliedern von  $f_g$  bestimmen die Zeitstörung 2. Ordnung

$$(\Delta_g)_2 = \int_{E_0}^g \left( \sum_{i=1}^g \frac{\partial f_g}{\partial \Delta_i} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot (\Delta_i)_2 + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^g \frac{\partial^2 f_g}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot (\Delta_i)_1 (\Delta_j)_1 \right) dE. \quad (44)$$

Der allgemeine Schritt von den Störungen  $(n-1)$ -ter Ordnung auf die Störungen  $n$ -ter Ordnung lautet formelmässig

$$\begin{aligned} (\Delta_k)_n = & \int_{E_0}^g \left( \sum_{i=1}^g \frac{\partial f_k}{\partial \Delta_i} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot (\Delta_i)_{n-1} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^g \frac{\partial^2 f_k}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot \sum_{l=1}^{n-2} (\Delta_i)_l (\Delta_j)_{n-1-l} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^g \frac{\partial^{n-1} f_k}{\partial \Delta_{i_1} \dots \partial \Delta_{i_{n-1}}} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot (\Delta_{i_1})_1 \dots (\Delta_{i_{n-1}})_1 \right) dE, \\ & (k=1, 2, \dots, g), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} (\Delta_g)_n = & \int_{E_0}^g \left( \sum_{i=1}^g \frac{\partial f_g}{\partial \Delta_i} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot (\Delta_i)_n + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^g \frac{\partial^2 f_g}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot \sum_{l=1}^{n-1} (\Delta_i)_l (\Delta_j)_{n-l} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^g \frac{\partial^n f_g}{\partial \Delta_{i_1} \dots \partial \Delta_{i_n}} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot (\Delta_{i_1})_1 \dots (\Delta_{i_n})_1 \right) dE. \end{aligned}$$

Mit diesem Iterationsverfahren erhält man die Lösung von (39) als Reihe

$$\Delta_k = (\Delta_k)_1 + (\Delta_k)_2 + (\Delta_k)_3 + \dots, \quad (k=1, \dots, g). \quad (46)$$

Die einzelnen Reihenglieder  $(\Delta_k)_n$  sind in (41), (42), (43), (44), (45) als Integrale gegeben; es handelt sich also darum, diese Integrale auszurechnen. Ausser in speziellen Fällen ist dies analytisch nur möglich durch Reihenentwicklung der Integranden.

Die an der Stelle  $\vec{\Delta}=\vec{0}$  genommenen Ausdrücke  $f_k, \frac{\partial f_k}{\partial \Delta_i}, \frac{\partial^2 f_k}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j}, \dots$  ( $k=1, \dots, g$ ) sind nur von der unabhängigen Variablen  $E$  abhängig. Man kann sie aber auch als Funktionen von  $E$  und der Störkörpervariablen  $E'$  auffassen, wenn man  $E'$  auch als unabhängige Variable ansieht und erst später berücksichtigt, dass  $E'$  abhängig ist von  $E$ . Wir behaupten nun, dass diese Ausdrücke sowohl periodisch sind in  $E$  als auch in  $E'$  mit der Periode  $2\pi$ , d.h. in Fourierreihen der Form

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{mn} \cdot e^{i(mE+nE')} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{mn} \text{cis}(mE+nE') \quad (47)$$

entwickelt werden können, wobei wir im folgenden die rechts stehende Schreibweise verwenden werden.

Zum Beweis, der wegen des Auftretens der Winkelargumente  $\frac{E}{2}$  und  $\frac{E'}{2}$  nicht trivial ist, schauen wir uns die Störungsterme in (37) genauer an.  $M, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, (i = 1, 2, 3, 4)$  sind Konstanten,  $E$  kommt explizit nur in der Form  $\sin \frac{E}{2}$  und  $\cos \frac{E}{2}$  vor,  $u_i$  und  $\frac{du_i}{dE}$  sind von der Form  $a \cdot \sin \frac{E}{2} + b \cdot \cos \frac{E}{2}$ , wo  $a, b$  noch von  $\Delta\alpha_i, \Delta\beta_i, (i = 1, 2, 3, 4)$  abhängig sind,  $u_i'$  ist in (20) angeschrieben; ferner ist  $r = \sum u_i^2$  und  $\frac{\partial V}{\partial u_i}$  wegen

$$\frac{\partial V}{\partial u_i} = \text{grad } V \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right) = 2 \cdot \text{grad } V \cdot \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \end{bmatrix}$$

mit  $\text{grad } V$  aus (3) eine Funktion der  $u_i$  und  $u_i', (i = 1, 2, 3, 4)$ . Somit ist zunächst klar, dass die Störungsterme  $f_k, (k = 1, \dots, 8)$  in Fourierreihen der Form

$$\sum_{m, n = -\infty}^{+\infty} b_{m, n} (\Delta\alpha_1, \dots, \Delta\beta_4) \cdot \text{cis} \left( m \frac{E}{2} + n \frac{E'}{2} \right) \quad (48)$$

entwickelt werden können.

Für das weitere ist ein Hilfssatz über gewöhnliche Fourierreihen nützlich.

Seien Fourierreihen  $f_\mu(x), g_\nu(x)$  gegeben. Die  $f_\mu(x)$  seien von der Form

$$\sum_{k = -\infty}^{+\infty} f_{\mu k} \text{cis}(kx) \quad , \quad \text{mit } f_{\mu, 2k} = 0 \text{ für } k \text{ ganz}, \quad (49)$$

die  $g_\nu(x)$

$$\sum_{k = -\infty}^{+\infty} g_{\nu k} \text{cis}(kx) \quad , \quad \text{mit } g_{\nu, 2k+1} = 0 \text{ für } k \text{ ganz}. \quad (50)$$

Dann gilt:

a) Das Produkt zweier Fourierreihen der Form (49) ist eine Fourierreihe der

Form (50):  $f_1(x) \cdot f_2(x) = g_1(x)$ .

b) Das Produkt einer Fourierreihe der Form (49) mit einer Reihe der Form (50)

ist eine Fourierreihe der Form (49):  $f_1(x) \cdot g_2(x) = f_2(x)$ .

c) Eine Funktion von Fourierreihen der Form (50) ist wieder eine Fourierreihe der Form (50):

$$F(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)) = g_{n+1}(x).$$

Beweis:

a)  $f_1(x) \cdot f_2(x) = \left( \sum_k f_{1k} \text{cis}(kx) \right) \left( \sum_l f_{2l} \text{cis}(lx) \right) = \sum_j \left( \sum_h f_{1h} f_{2, j-h} \right) \text{cis}(jx) = \sum_j g_{1j} \text{cis}(jx).$

Für  $j$  ungerade ist  $f_{1h} \cdot f_{2, j-h} = 0$ , denn für  $h$  gerade ist  $f_{1h} = 0$  und für  $h$  ungerade ist  $f_{2, j-h} = 0$ ; somit ist  $g_{1j} = 0$  für  $j$  ungerade, q. e. d.

b)  $f_1(x) \cdot g_1(x) = \sum_j \left( \sum_h f_{1h} g_{1, j-h} \right) \text{cis}(jx) = \sum_j f_{2j} \text{cis}(jx)$ . Für  $j$  gerade ist  $f_{1h} \cdot g_{1, j-h} = 0$ , denn für  $h$  gerade ist  $f_{1h} = 0$  und für  $h$  ungerade  $g_{1, j-h} = 0$ ; somit  $f_{2j} = 0$  für  $j$  gerade, q. e. d.

c) Da die  $g_{kl} = 0$  sind für  $l$  ungerade, sind  $g_1(x), \dots, g_n(x)$  periodisch in  $(2x)$  mit der Periode  $2\pi$  (d.h. periodisch in  $x$  mit der Periode  $\pi$ ). Dann ist auch  $F(g_1, \dots, g_n)$  periodisch in  $(2x)$  mit der Periode  $2\pi$ , und daher sind  $g_{n+1, l} = 0$  für  $l$  ungerade, q. e. d.

Mittels dieses Hilfssatzes lässt sich nun zeigen, dass die Störungsterme  $f_k(\vec{\Delta}, E)$  ( $k=1, \dots, 8$ ) nicht nur in der Form (48), sondern sogar in der Form

$$\sum_{m, n = -\infty}^{\infty} a_{mn}(\Delta\alpha_1, \dots, \Delta\beta_4) \cdot \text{cis}(mE + nE') \tag{51}$$

entwickelt werden können. Wir werden also beweisen, dass in (48) alle Koeffizienten  $b_{mn}$  mit ungeraden  $m$  oder  $n$  verschwinden.

$\sin \frac{E}{2}$ ,  $\cos \frac{E}{2}$ ,  $u_i$ ,  $\frac{du_i}{dE}$  und  $u_i'$ , ( $i=1, 2, 3, 4$ ) sind von der Form (49) bzgl. Entwicklung nach  $\frac{E}{2}$  bzw.  $\frac{E'}{2}$ .  $x, y, z, r$  und  $x', y', z', r'$  sind von der Form (50); das folgt aus Hilfssatz a), denn die einzelnen Glieder in den Ausdrücken für diese Größen (als Funktionen der  $u_i$  bzw.  $u_i'$ ) sind Produkte von je zweien der  $u_i$  bzw.  $u_i'$ , die von der Form (49) sind.  $E'$  kommt in den Störungstermen nur in den  $u_i'$  und diese nur in den  $x', y', z', r'$  vor; wegen Hilfssatz c) sind die Störungsterme bzgl. Entwicklung nach  $\frac{E'}{2}$  daher von der Form (50), und somit verschwinden in (48) die  $b_{mn}$  mit ungeradem  $n$ . In  $a$  kommt  $E$  nicht explizit vor.  $\text{grad } V$  ist eine Funktion

von  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$ , also nach Hilfssatz c) bzgl. Entwicklung nach  $\frac{E}{2}$  von der Form (50). Die  $\frac{\partial V}{\partial u_i}$  sind nach Hilfssatz b) von der Form (49), denn die einzelnen Glieder sind Produkte einer Komponente von  $\text{grad} V$  mit einem  $u_i$ . Sukzessive folgt:  $\vec{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial u_i}$  ist von der Form (49) (Hilfssatz b)),  $\sum \frac{\partial V}{\partial u_i} \frac{du_i}{dE}$  von der Form (50) (Hilfssatz a)),  $\frac{du_i}{dE} \sum \frac{\partial V}{\partial u_i} \frac{du_i}{dE}$  von der Form (49) (Hilfssatz b)),  $f_k$  ( $k=1, \dots, 9$ ) von der Form (50) (Hilfssatz a)). Damit verschwinden auch alle  $b_{mn}$  mit ungeradem  $m$ , q. e. d.

Wird nun in (51)  $\vec{\Delta} = \vec{0}$  gesetzt, so sind die  $a_{mn}$  konstant und die  $f_k(\vec{0}, E)$  ( $k=1, \dots, 9$ ) haben die behauptete Form (47). Um dasselbe auch für die Ableitungen  $\left. \frac{\partial f_k}{\partial \Delta_i} \right|_{\vec{\Delta}=\vec{0}}, \left. \frac{\partial^2 f_k}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \right|_{\vec{\Delta}=\vec{0}}, \dots$  nachzuweisen, betrachten wir die Reihe (51). Bei der partiellen Ableitung nach einem  $\Delta_i$  ( $i=1, \dots, 9$ ) muss man sich die  $f_k$  als Funktionen von  $\vec{\Delta}$  und  $E$  denken. Es ist daher  $E'$  in Funktion von  $\vec{\Delta}$  und  $E$  auszudrücken, und es wird

$$\frac{\partial}{\partial \Delta_k} \left( \sum_{m,n} a_{mn} \cdot \text{cis}(mE + nE') \right) = \sum_{m,n} \left( \frac{\partial a_{mn}}{\partial \Delta_k} - a_{mn} i n \frac{\partial E'}{\partial \Delta_k} \right). \quad (52)$$

$$\cdot \text{cis}(mE + nE') = \sum_{m,n} \widetilde{a}_{mn}(\vec{\Delta}, E) \cdot \text{cis}(mE + nE'), \quad (k=1, \dots, 9).$$

Die  $\widetilde{a}_{mn}$  sind nicht wie die  $a_{mn}$  nur von  $\vec{\Delta}$ , sondern wegen dem Glied mit  $\frac{\partial E'}{\partial \Delta_k}$  auch noch von  $E$  explizit abhängig. Das stört vorerst, aber wegen

$$\frac{\partial E'}{\partial \Delta_k} = \left( \frac{dt}{dE'} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial t}{\partial \Delta_k} = \left( \frac{dt}{dE'} \right)^{-1} \cdot \delta_{k9}$$

wo  $\delta_{k9}$  das Kronecker-Symbol bedeutet, und da nach (24)

$$\frac{dt}{dE'} = a'^{\frac{3}{2}} \cdot (M + m')^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - e' \cos E')$$

ist, lässt sich  $\widetilde{a}_{mn}$  schreiben

$$\widetilde{a}_{mn}(\vec{\Delta}, E) = \widetilde{a}_{mn}^{(1)}(\vec{\Delta}) + \widetilde{a}_{mn}^{(2)}(\vec{\Delta}) \cdot \frac{1}{1 - e' \cos E'}$$

$\frac{1}{1 - e' \cdot \cos E'}$  ist periodisch in  $E'$  und bleibt beschränkt für  $e' < 1$ , so-  
dass man schliesslich

$$\frac{\partial}{\partial \Delta_k} \left( \sum a_{mn}(\vec{\Delta}) \cdot \text{cis}(mE + nE') \right) = \sum \widetilde{a}_{mn}(\vec{\Delta}) \cdot \text{cis}(mE + nE') \quad (53)$$

mit Koeffizienten  $\widetilde{a}_{mn}$ , die nur noch von  $\vec{\Delta}$  abhängen, erhält. Für  $\vec{\Delta} = \vec{0}$  werden die  $\widetilde{a}_{mn}$  konstant; damit ist die Behauptung (47) auch für die  $\left. \frac{\partial f_k}{\partial \Delta_i} \right|_{\vec{\Delta} = \vec{0}}$  ( $k = 1, \dots, 8$ ;  $i = 1, \dots, 9$ ) bewiesen. Dass (47) für die 2., 3., ... Ab-  
leitungen gilt, beweist man durch Wiederholung des Verfahrens, das wir so-  
eben für den Schritt von den  $f_k$  zu den  $\frac{\partial f_k}{\partial \Delta_i}$  durchgeführt haben.

Es bleiben noch die Ableitungen des 9. Störungsterms  $\left. \frac{\partial f_9}{\partial \Delta_i} \right|_{\vec{\Delta} = \vec{0}}$ ,  $\left. \frac{\partial^2 f_9}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \right|_{\vec{\Delta} = \vec{0}}$ ,  
..., ( $i, j = 1, 2, \dots, 8$ ) zu untersuchen. Aus dem Ausdruck für  $f_9$   
in (37) leitet man ab

$$\frac{\partial f_9}{\partial \Delta_i} = \frac{\partial r}{\partial \Delta_i} \cdot \sqrt{\alpha} + \frac{r}{2\sqrt{\alpha M}} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \Delta_i}, \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (54)$$

Wenn man

$$r = \frac{1}{2} \left[ \sum (\bar{\alpha}_i + \Delta \alpha_i)^2 + \sum (\bar{\beta}_i + \Delta \beta_i)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \sum (\bar{\alpha}_i + \Delta \alpha_i)^2 - \sum (\bar{\beta}_i + \Delta \beta_i)^2 \right] \cdot \cos E + \sum (\bar{\alpha}_i + \Delta \alpha_i) (\bar{\beta}_i + \Delta \beta_i) \cdot \sin E, \\ \alpha = \frac{1}{2} \left[ \sum (\bar{\alpha}_i + \Delta \alpha_i)^2 + \sum (\bar{\beta}_i + \Delta \beta_i)^2 \right]$$

in (54) einsetzt, sieht man leicht, dass  $\left. \frac{\partial f_9}{\partial \Delta_i} \right|_{\vec{\Delta} = \vec{0}}$  von der Form

$$\left. \frac{\partial f_9}{\partial \Delta_i} \right|_{\vec{\Delta} = \vec{0}} = c_{i1}(\Delta_1, \dots, \Delta_8) + c_{i2}(\Delta_1, \dots, \Delta_8) \cdot \cos E + c_{i3}(\Delta_1, \dots, \Delta_8) \cdot \sin E$$

ist. Speziell wird also

$$\left. \frac{\partial f_9}{\partial \Delta_i} \right|_{\vec{\Delta} = \vec{0}} = c_{i1} + c_{i2} \cdot \cos E + c_{i3} \cdot \sin E \quad (55)$$

ein einfaches Fourierpolynom in  $E$ . Die Fourierentwicklungen der höhern  
Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_9}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} &= \frac{\partial c_{i4}}{\partial \Delta_j} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} + \frac{\partial c_{i2}}{\partial \Delta_j} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot \cos E + \frac{\partial c_{i3}}{\partial \Delta_j} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} \cdot \sin E \\ &= c_{ij4} + c_{ij2} \cdot \cos E + c_{ij3} \cdot \sin E \quad , \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (56)$$

werden von derselben höchst einfachen Gestalt.

Die Fourierreentwicklungen

$$\begin{aligned} f_k(\vec{0}, E) &= \sum a_{kmn} \cdot \text{cis}(mE + nE') \quad , \quad (k=1, \dots, 9) \quad , \\ \frac{\partial f_k}{\partial \Delta_j} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} &= \sum a_{kjm n} \cdot \text{cis}(mE + nE') \quad , \quad (k=1, \dots, 8; j=1, \dots, 9) \quad , \\ &\vdots \\ \frac{\partial^p f_k}{\partial \Delta_{j_1} \dots \partial \Delta_{j_p}} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} &= \sum a_{k j_1 \dots j_p m n} \cdot \text{cis}(mE + nE') \quad , \quad \left( \begin{matrix} k=1, \dots, 8 \\ j_1, \dots, j_p=1, \dots, 9 \end{matrix} \right) \quad , \end{aligned} \quad (57)$$

von denen wir gezeigt haben, dass sie existieren, sind im allgemeinen nicht analytisch über  $E$  integrierbar, denn  $E'$  ist eine komplizierte Funktion von  $E$ . Nach (24) ist  $E'$  eine Funktion von  $t$ ; da die Ausdrücke (57) an der Stelle  $\vec{\Delta}=\vec{0}$ , speziell also  $\Delta t = 0$ , genommen sind, muss  $\bar{t}$  anstelle von  $t$  eingesetzt werden. Unter Verwendung von (29), (30), (31) erhält man daher als Beziehung zwischen  $E$  und  $E'$

$$\begin{aligned} \bar{a}^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} [(E - E_0) - \bar{e}(\sin E - \sin E_0)] &= \\ &= a^{\frac{3}{2}} (M + m')^{-\frac{1}{2}} [(E' - E'_0) - e'(\sin E' - \sin E'_0)] \quad . \end{aligned} \quad (58)$$

Sei  $E' = h(E)$  die nach  $E'$  aufgelöste Beziehung (58).  $\text{cis}(mE + n \cdot h(E))$  ist nur dann analytisch leicht integrierbar, wenn  $h(E)$  eine lineare Funktion ist. (58) zeigt aber, dass  $h(E)$  im allgemeinen nichtlinear ist. Wir sind deshalb gezwungen,  $E'$  zu ersetzen durch einen neuen Parameter  $E_1$ , von dem wir fordern

- a)  $E_1$  linear von  $E$  abhängig, d.h.  $E_1 = \mu E + c$ ,
- b) eine in der Form  $\sum a_{mn} \text{cis}(mE + nE')$  entwickelbare Funktion ist auch entwickelbar in der Form  $\sum b_{mn} \text{cis}(mE + nE_1)$ ,
- c) durch einen bestimmten Wert von  $E_1$  ist die Lage des Störkörpers in seiner Bahn eindeutig festgelegt.

Man sieht bald ein, dass a), b), c) nicht gleichzeitig erfüllbar sind. Wir lassen daher die Forderung c) fallen und lassen zu, dass sich die Parametereinteilung  $E_4$  der Störkörperbahn je nach der Lage des Mobils, d.h. mit  $E$ , ändern darf. Um nicht Forderung b) zu verletzen, muss man dann aber verlangen, dass diese Änderung periodisch in  $E$  ist. Wir ersetzen also c) durch  
 c') Die Parametereinteilung  $E_4$  der Störkörperbahn darf sich mit  $E$  ändern, aber nur periodisch in  $E$ .

Die Parametereinteilung  $E_4$  darf also nur schwanken um ihre ursprüngliche Lage, nicht sich immer mehr davon entfernen.

Die Forderungen a), b), c') schränken die möglichen Definitionen von  $E_4$  im wesentlichen auf die folgende ein

$$E_4 = E' - e' \sin E' + \bar{e} \left( \frac{M+m'}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{a}}{a'} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin E \quad (59)$$

Um diese Beziehung zu erläutern, bemerken wir, dass man (59) auch schreiben kann

$$E_4 = A' + \bar{e} \mu \sin E \quad (60)$$

wobei  $A'$  die mittlere Anomalie des Störkörpers und  $\mu$  das Verhältnis der mittleren täglichen Bewegungen von Mobil und Störkörper sind.  $E_4$  weicht also nur wenig ab von der mittleren Anomalie, wenn die Exzentrizität  $\bar{e}$  des Mobils klein ist oder die mittlere Bewegung des Mobils jene des Störkörpers wesentlich übertrifft. Die Transformation (60) hat auch Hansen [2] in anderem Zusammenhang verwendet.

Beim zeitlichen Ablauf der Bewegung ist nun  $E_4$  linear abhängig von  $E$ ; (58) und (59) ergeben nämlich

$$E_4 = \left( \frac{M+m'}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{a}}{a'} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot E + [E'_0 - e' \sin E'_0 - \left( \frac{M+m'}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{a}}{a'} \right)^{\frac{3}{2}} (E_0 - \bar{e} \sin E_0)] \quad (61)$$

kurz

$$E_4 = \mu E + c \quad (62)$$

$\mu$  ist wieder das Verhältnis der mittleren Bewegungen,  $c$  eine Abkürzung für die konstante eckige Klammer in (61). Damit erhalten wir als wichtiges Resultat, dass  $f_k(\vec{0}, E)$ ,  $\frac{\partial f_k}{\partial \Delta_i} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}}$ ,  $\frac{\partial^2 f_k}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}}$ , ... entwickelbar sind nach  $\text{cis}(mE+n(\mu E+c))$ . Sei also, mit neuen Koeffizienten  $a$

$$\begin{aligned} f_k(\vec{0}, E) &= \sum a_{kmn} \text{cis}(mE+n(\mu E+c)), \quad (k=1, \dots, 8), \\ \frac{\partial f_k}{\partial \Delta_j} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} &= \sum a_{kjmn} \text{cis}(mE+n(\mu E+c)), \quad (k=1, \dots, 8; j=1, \dots, 9), \\ &\vdots \\ \frac{\partial^p f_k}{\partial \Delta_{j_1} \dots \partial \Delta_{j_p}} \Big|_{\vec{\Delta}=\vec{0}} &= \sum a_{kj_1 \dots j_p mn} \text{cis}(mE+n(\mu E+c)), \quad \left( \begin{array}{l} k=1, \dots, 8 \\ j_1, \dots, j_p=1, \dots, 9 \end{array} \right), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{63}$$

Nun können die Integrationen (41), (42), (43), (44), (45) ausgeführt werden.

$$\begin{aligned} (\Delta_k)_1 &= \int_{E_0} \sum a_{kmn} \text{cis}(mE+n(\mu E+c)) dE \\ &= a_{k00} \cdot (E-E_0) + \sum_{m,n \neq 0,0} \frac{a_{kmn}}{i(m+n\mu)} \left( \text{cis}(mE+n(\mu E+c)) \right. \\ &\quad \left. - \text{cis}(mE_0+n(\mu E_0+c)) \right), \quad (k=1, \dots, 8), \end{aligned} \tag{64}$$

$$(\Delta_9)_1 = \int_{E_0} \sum_{j=1}^9 (c_{j1} + c_{j2} \cdot \cos E + c_{j3} \cdot \sin E) \cdot (\Delta_j)_1 dE. \tag{65}$$

In (65) sind für die  $(\Delta_j)_1$  die Reihen (64) einzusetzen; (65) wird deshalb von der Form

$$(\Delta_9)_1 = \int_{E_0} \left[ \sum_{m,n} b_{0mn} \text{cis}(mE+n(\mu E+c)) + (b_{1,4} \text{cis} E + b_{10} + b_{1,-1} \text{cis}(-E)) E \right] dE. \tag{66}$$

Den Koeffizienten

$$b_{10} = c_{11} a_{100} + c_{21} a_{200} + \dots + c_{81} a_{800}$$

wollen wir etwas näher untersuchen. Die  $c_{i1}$  erhält man explizit aus (54)

$$c_{i1} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a}{M}} \bar{\alpha}_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad ,$$

$$c_{i1} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a}{M}} \bar{\beta}_{i-4} \quad , \quad (i = 5, 6, 7, 8) \quad .$$

Die  $a_{i00}$  sind die Koeffizienten der säkularen Glieder der Elementenstörungen; wir schreiben

$$a_{i00} \cdot (E - E_0) = (\Delta_i)_{1s} \quad , \quad (i = 1, \dots, 8) \quad ,$$

wobei der Index  $s$  andeuten soll, dass es sich um den säkularen Anteil von  $(\Delta_i)_1$  handelt. Damit wird

$$b_{i0} \cdot (E - E_0) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a}{M}} \cdot \left[ \sum_{i=1}^4 \bar{\alpha}_i (\Delta \alpha_i)_{1s} + \sum_{i=1}^4 \bar{\beta}_i (\Delta \beta_i)_{1s} \right] \quad . \quad (67)$$

Die eckige Klammer in (67) ist gerade der säkulare Anteil der Störung 1. Ordnung der grossen Halbachse der Mobilbahn

$$(\Delta a)_1 = \sum_{i=1}^4 \bar{\alpha}_i (\Delta \alpha_i)_1 + \sum_{i=1}^4 \bar{\beta}_i (\Delta \beta_i)_1 \quad .$$

Wir zeigen nun, dass  $a$  keine säkulare Störung erster Ordnung erleidet, was allerdings aus einem bekannten Resultat von Lagrange [8] folgen würde, wenn wir die am Ende von 1.4. erwähnte Tatsache, dass  $a$  die Halbachse der oskulierenden Keplerbahn ist, nachgewiesen hätten.

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dE} a &= \frac{d}{dE} \left[ \frac{1}{2} \sum (\bar{\alpha}_i + \Delta \alpha_i)^2 + \frac{1}{2} \sum (\bar{\beta}_i + \Delta \beta_i)^2 \right] \\ &= \sum (\bar{\alpha}_i + \Delta \alpha_i) \cdot \frac{d \Delta \alpha_i}{dE} + \sum (\bar{\beta}_i + \Delta \beta_i) \cdot \frac{d \Delta \beta_i}{dE} \quad ; \end{aligned}$$

durch Einsetzen der rechten Seiten von (37) für  $\frac{d \Delta \alpha_i}{dE}$  und  $\frac{d \Delta \beta_i}{dE}$  erhält man

$$\frac{d}{dE} a = \frac{a}{2M} \sum_{i=1}^4 \left( r \frac{\partial V}{\partial u_i} + 4 \frac{du_i}{dE} \sum_{j=1}^4 \frac{\partial V}{\partial u_j} \frac{du_j}{dE} \right) \left( -(\bar{\alpha}_i + \Delta \alpha_i) \sin \frac{E}{2} + (\bar{\beta}_i + \Delta \beta_i) \cos \frac{E}{2} \right) \quad ,$$

oder, wegen (35),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dE} a &= \frac{a}{M} \sum_{i=1}^6 \left( r \frac{\partial V}{\partial u_i} + 4 \frac{du_i}{dE} \sum_{j=1}^6 \frac{\partial V}{\partial u_j} \frac{du_j}{dE} \right) \cdot \frac{du_i}{dE} \\ &= \frac{a}{M} \left( r + 4 \sum \left( \frac{du_i}{dE} \right)^2 \right) \left( \sum \frac{\partial V}{\partial u_i} \frac{du_i}{dE} \right), \end{aligned}$$

und schliesslich, da  $r + 4 \sum \left( \frac{du_i}{dE} \right)^2 = 2a$  ist,

$$\frac{d}{dE} a = \frac{d}{dE} (\bar{a} + \Delta a) = \frac{2\bar{a}^2}{M} \cdot \sum \frac{\partial V}{\partial u_i} \frac{du_i}{dE}$$

In der Störungsrechnung erster Ordnung sind auf der rechten Seite der Differentialgleichung die ungestörten Grössen einzusetzen

$$\frac{d}{dE} (\Delta a)_1 = \frac{2\bar{a}^2}{M} \cdot \overline{\sum \frac{\partial V}{\partial u_i} \frac{du_i}{dE}};$$

der Querstrich über der Summe soll andeuten, dass die ungestörten Grössen einzusetzen sind. Der Koeffizient des säkularen Glieds von  $(\Delta a)_1$  ist nun gleich dem konstanten Glied bei der Fourierentwicklung von  $\frac{2\bar{a}^2}{M} \overline{\sum \frac{\partial V}{\partial u_i} \frac{du_i}{dE}}$  nach  $E$  und  $E_1$ . Wir haben also zu beweisen, dass

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\sum \frac{\partial V}{\partial u_i} \frac{du_i}{dE}} dE_1 dE = 0$$

ist.  $V$  ist abhängig von den Mobilkoordinaten  $u_i$  und den Störkörperkoordinaten  $u_i'$ , die  $u_i$  sind nur von  $E$  abhängig, die  $u_i'$  von  $E'$  und daher gemäss (59) von  $E_1$  und  $E$ . Es ist also  $V = V(u_i(E), u_i'(E_1, E))$ .

Nun führen wir die Integration über  $E_1$  bei festgehaltenem  $E$  aus

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \sum \frac{\partial V(u_i(E), u_i'(E_1, E))}{\partial u_i} \cdot \frac{du_i}{dE} \cdot dE_1 = \\ &= \sum \frac{\partial \int_0^{2\pi} V(u_i(E), u_i'(E_1, E)) dE_1}{\partial u_i} \cdot \frac{du_i}{dE} \end{aligned}$$

Zunächst könnte man denken, dass das Integral  $W(E) = \int_0^{2\pi} V(u_i(E), u_i'(E_1, E)) dE_1$  wie  $V$  von  $u_i$  und  $u_i'$  abhängig ist, denn  $u_i$  und  $u_i'$  hängen ja beide noch von  $E$  ab. Tatsächlich ist aber  $W$  durch die  $u_i$  allein bestimmt. Um das einzusehen, ersetzen wir die Integrationsvariable  $E_1$  durch die mittlere Anomalie  $A'$  des Störkörpers, deren Zusammenhang mit  $E_1$  durch (60) gegeben ist;  $A'$  bestimmt die Koordinaten des Störkörpers eindeutig; es ist also  $u_i' = u_i'(A')$ . Nun wird

$$W = \int_0^{2\pi} V(u_i(E), u_i'(E_1, E)) dE_1 = \int_{-\bar{e}\mu \sin E}^{2\pi - \bar{e}\mu \sin E} V(u_i(E), u_i'(A')) dA' ,$$

und wegen der Periodizität von  $V$  in  $A'$

$$W = \int_{-\bar{e}\mu \sin E}^{2\pi - \bar{e}\mu \sin E} V(u_i(E), u_i'(A')) dA' = \int_0^{2\pi} V(u_i(E), u_i'(A')) dA' .$$

$W$  ist also nur von den  $u_i(E)$  abhängig, und wir können leicht auch noch über  $E$  integrieren, da der Integrand die totale Ableitung von  $W$  nach  $E$  ist.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum \frac{\partial V}{\partial u_i} \frac{du_i}{dE} dE_1 dE &= \int_0^{2\pi} \sum \frac{\partial W(u_i(E))}{\partial u_i} \frac{du_i}{dE} dE \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{dW}{dE} dE = W(\bar{u}_i(2\pi)) - W(\bar{u}_i(0)) = 0 . \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass  $\alpha$  in erster Ordnung keine säkulare Störung erfährt; es ist also  $(\Delta \alpha)_{15} = 0$  und in (67)

$$b_{10} = 0 . \tag{68}$$

Die Integration von (66) gibt

$$\begin{aligned}
 (\Delta_g)_1 = & b_{000} \cdot (E - E_0) + \sum_{m,n \neq 0,0} \frac{b_{0mn}}{i \cdot (m+n\mu)} (\text{cis}(mE+n(\mu E+c)) \\
 & - \text{cis}(mE_0+n(\mu E_0+c))) + b_{11} \cdot (\text{cis } E - \text{cis } E_0) + b_{1-1} \cdot \\
 & \cdot (\text{cis}(-E) - \text{cis}(-E_0)) - i \cdot b_{11} \cdot (E \text{cis } E - E_0 \text{cis } E_0) + i \cdot b_{1-1} \cdot (E \text{cis}(-E) - E_0 \text{cis}(-E_0));
 \end{aligned} \tag{69}$$

wegen (68) enthält die Zeitstörung 1. Ordnung kein in  $E$  quadratisches Glied.

Allgemein werden beim Uebergang von der  $(p-1)$ -ten zur  $p$ -ten Störungsordnung jeweils zwei Integrationen durchlaufen, eine erste für die Berechnung der  $(\Delta_k)_p$ , ( $k = 1, \dots, 8$ ) aus den  $(\Delta_k)_{p-1}$ , ( $k = 1, \dots, 9$ ) und eine zweite für die Berechnung von  $(\Delta_g)_p = (\Delta t)_p$  aus den  $(\Delta_k)_p$ , ( $k = 1, \dots, 8$ ). Bei jeder Integration kommt die nächsthöhere Potenz von  $E$  dazu. Die Störungen  $p$ -ter Ordnung werden daher Integrale der Form

$$\begin{aligned}
 (\Delta_k)_p = & \int_{E_0} \sum_{m,n} (c_{k0mn} + c_{k1mn} \cdot E + \dots + c_{k,2p-2,mn} E^{2p-2}) \cdot \\
 & \cdot \text{cis}(mE + n(\mu E + c)) dE \quad , \quad (k = 1, \dots, 8) \quad , \\
 (\Delta_g)_p = & \int_{E_0} \sum_{m,n} (c_{g0mn} + c_{g1mn} E + \dots + c_{g,2p-1,mn} E^{2p-1}) \cdot \\
 & \cdot \text{cis}(mE + n(\mu E + c)) dE \quad ,
 \end{aligned} \tag{70}$$

die formal mittels der Formel

$$\int_{E_0} E^j \text{cis}(mE + n(\mu E + c)) dE = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{v=0}^j \frac{j! i^{v-1}}{(j-v)!} \cdot \frac{1}{(m+n\mu)^{v+1}} (E^{j-v} \cdot \text{cis}(mE + \\ + n(\mu E + c)) - E_0^{j-v} \cdot \text{cis}(mE_0 + n(\mu E_0 + c))) \\ \text{für } m, n \neq 0, 0 \quad , \\ \frac{E^{j+1} - E_0^{j+1}}{j+1} \quad \text{für } m = n = 0 \quad , \end{array} \right\} \tag{71}$$

integriert werden können.

Wenn  $\mu$  rational ist, lassen sich ganzzahlige  $m, n$  finden, sodass  $m+n\cdot\mu = 0$  ist. In diesem als Resonanz bezeichneten Fall entsteht bei der Integration des betreffenden Gliedes ein säkularer Term; statt (71) gilt

$$\int_{E_0} E^j \cdot \text{cis}(mE+n(\mu E+c)) dE = \frac{(E^{j+1} - E_0^{j+1}) \cdot \text{cis}(nc)}{j+1}, \quad \text{falls } m+n\mu=0. \quad (72)$$

Da in der praktischen Rechnung  $m, n$  nur über einen endlichen Bereich  $B$  laufen und  $\mu$  höchst selten exakt von der Form

$$\mu = \frac{p}{q} \quad ; \quad p, q \in B \quad , \quad \text{ganzzahlig}$$

ist, wird man kaum je in die Lage kommen, (72) anzuwenden. Immerhin muss man im Auge behalten, dass  $(m+n\mu)^v$  sehr klein werden kann; die betreffenden Koeffizienten werden dann bei der Integration stark vergrößert und die Glieder gleichzeitig langperiodisch, also gewissermassen "fast säkular", dies besonders bei grossem  $v$ .

Die Lösungen

$$\Delta_k = (\Delta_k)_1 + (\Delta_k)_2 + \dots \quad , \quad (k=1, \dots, 9)$$

werden schliesslich Reihen der Form

$$\Delta_k = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} (d_{k0mn} + d_{k1mn} E + d_{k2mn} E^2 + \dots) \cdot \text{cis}(mE+n(\mu E+c)), \quad (73)$$

also Doppel-Fourierreihen, deren Koeffizienten  $d_{kmn}(E)$  aber nicht konstant, sondern Potenzreihen in  $E$  sind. Nach den Elementen- und Zeitstörungen erhält man über die Formeln (32), (4) auch die Koordinatenstörungen

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sum_{m,n} (x_{0mn} + x_{1mn} E + x_{2mn} E^2 + \dots) \cdot \text{cis}(mE+n(\mu E+c)), \\ \Delta y &= \sum (y_{0mn} + y_{1mn} E + y_{2mn} E^2 + \dots) \cdot \text{cis}(mE+n(\mu E+c)), \\ \Delta z &= \sum (z_{0mn} + z_{1mn} E + z_{2mn} E^2 + \dots) \cdot \text{cis}(mE+n(\mu E+c)), \end{aligned} \quad (74)$$

als solche Reihen, da sie einfache Fourierpolynome in  $E$  sind, deren Koeffizienten linear von den  $\Delta_k$  abhängen.

### 11.3. Konvergenz der Potenzreihenentwicklungen der Fourierkoeffizienten

Bei der Untersuchung der Konvergenz der Reihen (73), (74) ist zu unterscheiden zwischen der Konvergenz der Potenzreihen der einzelnen Fourierkoeffizienten und der Konvergenz der ganzen Fourierreihe. Zunächst werden wir das erste, also die Konvergenz von

$$d(E) = d_0 + d_1 E + d_2 E^2 + d_3 E^3 + \dots \quad (75)$$

etwas beleuchten, wobei  $d(E)$  einer der Koeffizienten  $d_{k,m,n}(E)$  der Reihe (73) ist.

Eine Bestimmung des Konvergenzradius' von (75) mit funktionentheoretischen Methoden erweist sich als zu kompliziert. Wir wollen daher hier lediglich mit Größenordnungsbetrachtungen abschätzen, wie sich der Anfang der Reihe (75) etwa verhält. Natürlich ist damit noch gar nichts über die Konvergenz bewiesen, aber für die praktische Rechnung, in der ohnehin nur endlich viele Glieder mitgenommen werden können, genügt eine solche Abschätzung.

In der nun folgenden Größenordnungsrechnung habe  $\sim$  die Bedeutung "in der Größenordnung von",  $\ll$  und  $\gg$  seien wie üblich definiert. Alle Größenordnungen, die auftreten, sind Funktionen der Größenordnungen von  $M, m', r$  (= mittlerer Abstand des Mobils vom Zentralkörper),  $r'$  (= mittlerer Abstand des Störkörpers vom Zentralkörper) und  $E$ . Als Relation zwischen diesen Größenordnungen setzen wir  $r \sim r'$  oder  $r \ll r'$ , d.h. nicht  $r \gg r'$ , voraus. Dann ist

$$x, y, z \sim r, \quad \alpha_i, \beta_i, \mu_i, \frac{d\mu_i}{dE} \sim \sqrt{r}, \quad x', y', z' \sim r', \\ t \sim r^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} (E - E_0), \quad (\text{nach (29)});$$

aus (3) erhält man

$$V \sim m' \frac{r}{r_1^2} \quad \text{für } r \sim r' \quad , \quad V \sim m' \frac{r^2}{r_1^3} \quad \text{für } r \ll r' ,$$

also in beiden Fällen

$$V \sim m' \frac{r^2}{r_1^3} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial u_i} \sim \frac{V}{u_i} \sim m' \cdot \frac{r^{\frac{3}{2}}}{r_1^3} \quad ,$$

ferner aus (37)

$$f_k \sim \frac{m'}{M} \cdot \frac{r^3}{r_1^3} \cdot \sqrt{r} \quad , \quad (k = 1, \dots, 8) \quad , \quad f_9 \sim \frac{r^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}} \quad ,$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial \Delta_j} \sim \frac{f_k}{\sqrt{r}} \quad , \quad (k = 1, \dots, 9 \quad ; \quad j = 1, \dots, 8)$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial \Delta_9} \sim \frac{f_k}{r^{\frac{1}{2}}} \cdot M^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (k = 1, \dots, 9) \quad .$$

Eine Integration über  $E$  entspricht grössenordnungsmässig für genügend grosse  $E$  einer Multiplikation mit  $E$ . Nun lassen sich die Grössenordnungen der Störungen wachsender Ordnung berechnen

$$(\Delta_k)_1 \sim f_k \cdot E \sim \frac{m'}{M} \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 \sqrt{r} \cdot E \quad , \quad (k = 1, \dots, 8) \quad , \quad (76)$$

$$(\Delta_9)_1 \sim \sum_{j=1}^8 \frac{\partial f_9}{\partial \Delta_j} (\Delta_j)_1 \cdot E \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{r^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{m'}{M} \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 \sqrt{r} \cdot E \cdot E = \frac{m'}{M} \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 r^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} E^2 .$$

Die Abschätzung für  $(\Delta_9)_1$  ist noch zu pessimistisch; nach (68) verschwindet der Koeffizient des Gliedes mit  $E^2$  in  $(\Delta_9)_1$ . Man erhält daher

$$(\Delta_9)_1 \sim \frac{m'}{M} \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 r^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} \cdot E \quad . \quad (77)$$

Die Störungen 2. Ordnung werden grössenordnungsmässig

$$(\Delta_k)_2 \sim \sum_{j=1}^9 \frac{\partial f_k}{\partial \Delta_j} (\Delta_j)_1 \cdot E \sim \left[ \frac{f_k}{\sqrt{r}} \cdot \frac{m'}{M} \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 \sqrt{r} \cdot E + \frac{f_k}{r^{\frac{1}{2}}} M^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{m'}{M} \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 r^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} E \right] \cdot E \quad ,$$

$$(\Delta_k)_2 \sim \left[ \frac{m'}{M} \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 \right]^2 \cdot \sqrt{r} \cdot E^2 \quad , \quad (k = 1, \dots, 8) \quad , \quad (78)$$

$$(\Delta_9)_2 \sim \left[ \sum_1^8 \frac{\partial f_9}{\partial \Delta_i} (\Delta_i)_2 + \sum_1^8 \frac{\partial^2 f_9}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} (\Delta_i)_1 (\Delta_j)_1 \right] \cdot E \sim \left[ \frac{f_9}{\sqrt{r}} \cdot (\Delta_i)_2 + \frac{f_9}{r} (\Delta_i)_1^2 \right] \cdot E,$$

$$(\Delta_9)_2 \sim \left[ \frac{m'}{M} \left( \frac{r}{r_1} \right)^3 \right]^2 r^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} E^3, \quad (79)$$

und für die Störungen höherer Ordnung ist

$$(\Delta_k)_p \sim \left[ \frac{m'}{M} \left( \frac{r}{r_1} \right)^3 \right]^p \cdot \sqrt{r} \cdot E^{2p-2}, \quad (k=1, \dots, 8), \quad (80)$$

$$(\Delta_9)_p \sim \left[ \frac{m'}{M} \left( \frac{r}{r_1} \right)^3 \right]^p r^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} E^{2p-1}.$$

(76), (77), (78), (79), (80) lassen sich übersichtlicher so schreiben

$$(\Delta \alpha_i)_1 \sim \frac{m'}{M} \left( \frac{r}{r_1} \right)^3 E \cdot \bar{\alpha}_i, \quad (\Delta \beta_i)_1 \sim \frac{m'}{M} \left( \frac{r}{r_1} \right)^3 E \cdot \bar{\beta}_i,$$

$$(\Delta t)_1 \sim \frac{m'}{M} \left( \frac{r}{r_1} \right)^3 \cdot \bar{t}, \quad (81)$$

$$(\Delta_k)_2 \sim \frac{m'}{M} \left( \frac{r}{r_1} \right)^3 E \cdot (\Delta_k)_1, \quad (k=1, \dots, 8), \quad (\Delta t)_2 \sim \frac{m'}{M} \left( \frac{r}{r_1} \right)^3 E^2 (\Delta t)_1,$$

$$(\Delta_k)_p \sim \frac{m'}{M} \left( \frac{r}{r_1} \right)^3 E^2 \cdot (\Delta_k)_{p-1}, \quad (k=1, \dots, 9; \quad p \geq 3).$$

Wie (81) zeigt, sind unsere Entwicklungen (40) der Störungsterme in MacLaurin-Reihen nach den Störungen wachsender Ordnung nichts anderes als Entwicklungen nach dem Massenverhältnis  $\frac{m'}{M}$  oder dem Verhältnis der mittleren Abstände  $\frac{r}{r_1}$ .

Nun können wir zur Betrachtung der Konvergenz von (75) übergehen.

Es kann angenommen werden, dass ein Glied von (75) von der Grössenordnung der Störung ist, in der es zum ersten Mal auftritt. Nach (70) kommen beim Uebergang von der  $(p-1)$ -ten zur  $p$ -ten Störungsordnung zwei Potenzen von  $E$  dazu; man erhält demnach die Abschätzungen

$$d_n E^n \sim \frac{m'}{M} \left( \frac{r}{r_1} \right)^3 E^2 \cdot d_{n-2} E^{n-2},$$



von der Mitte aus in allen Richtungen so schnell gegen 0 gehen, dass zu beliebigem  $\epsilon$  ein  $N$  existiert mit

$$\left| \sum_{\substack{m,n \\ |m|,|n| > N}} d_{kmn} \cdot \text{cis}(mE + n(\mu E + c)) \right| < \epsilon, \quad (k=1, \dots, 3)$$

für beliebiges  $E$  (absolute Konvergenz). Dabei hängen die  $d_{kmn}$  noch von  $E$  ab. Für nicht zu grosse  $E$  erhält man eine genügend genaue Uebersicht über die Konvergenz von (82), wenn man statt der  $d_{kmn}(E)$  die aus der Störungsrechnung 1. Ordnung berechneten konstanten Approximationen  $(d_{kmn})_1$  einsetzt. Die Integrationen (64), (65) haben keinen Einfluss auf die Konvergenz der Fourierreihen; immerhin muss man beachten, dass bei Fast-Resonanz einzelne Glieder durch die Integration stark vergrößert werden. Es genügt somit, das Verhalten der  $a_{kmn}$  in (64), d.h. die Fourierentwicklungen der  $f_k(\vec{0}, E)$ , ( $k=1, \dots, 8$ ) zu untersuchen.

Nach dem Satz von Dirichlet über die Fourierentwicklung reeller Funktionen konvergieren Fourierreihen immer, wenn die zu entwickelnden Funktionen stetig und differenzierbar sind. Diese Voraussetzung ist in unserem Fall erfüllt, wenn sich, was wir annehmen wollen, die Bahnen von Störkörper und Mobil nicht schneiden, wenn also keine  $E, E_1$  existieren, sodass  $\vec{r} = \vec{r}'$  ist. Es geht also nicht um die Konvergenz an sich, sondern um die Raschheit der Konvergenz.

Da die  $f_k(\vec{0}, E)$  in Fourierreihen nach  $E$  und  $E_1$  entwickelbar sind, lassen sie sich als Funktionen der komplexen Variablen  $\xi = \text{cis } E$  und  $\xi' = \text{cis } E_1$  anschreiben; wir führen dafür die Bezeichnung  $g_k(\xi, \xi')$  ein. Unsere Fourierreihen

$$f_k(\vec{0}, E) = \sum a_{kmn} \text{cis}(mE + nE_1)$$

lassen sich damit als Laurentreihen schreiben

$$g_k(\xi, \xi') = \sum a_{kmn} \xi^m \xi'^n, \quad (k=1, \dots, 8) \quad (83)$$

Aus der Lage der Singularitäten von  $g_k$  in  $\xi$  und  $\xi'$  kann man auf das Verhalten der  $a_{kmn}$  für grosse  $m, n$  schliessen. So hat Poincaré [9] die Konvergenz der Entwicklung der sogenannten ebenen Störungsfunktion

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}$$

nach den mittleren Anomalien  $A$  und  $A'$  mit umfangreichen funktionentheoretischen Betrachtungen untersucht. Die Schwierigkeit liegt darin, dass die Singularitäten in  $\xi$  und  $\xi'$  gegenseitig voneinander abhängig sind. In unserem Fall mit der komplizierten Variablen  $E_1$  würde die Methode von Poincaré zuviel Aufwand erfordern. Aus diesem Grunde werden wir unser Hauptresultat, nämlich dass die Konvergenz der Fourierreihen kaum von der Exzentrizität des Mobils abhängt, nur beweisen in dem einfachen Fall, wo der Störkörper ortsfest und zudem in der Ebene der Mobilbahn ist. Zugleich werden wir aber Faustregeln für die numerische Praxis herleiten können, um die Anzahl der mitzunehmenden Glieder abzuschätzen. Da unter diesen vereinfachenden Annahmen nur noch in eine gewöhnliche Fourierreihe nach  $E$  entwickelt werden muss, erhält man statt (83)

$$h_k(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{kn} \xi^n, \quad (k=1, \dots, 8), \quad (84)$$

wobei die expliziten Ausdrücke für die  $h_k(\xi)$ , ( $k=1, \dots, 8$ ) so entstehen: Man hält in den rechten Seiten der ersten 8 Gleichungen von (37) die Störkörperkoordinaten  $x', y', z'$  konstant, setzt für alle Mobilgrössen ihre ungestörten Werte ein und schreibt, nachdem man alles in Funktion von  $E$  ausgedrückt hat,  $\frac{1}{2}(\xi + \frac{1}{\xi})$  statt  $\cos E$  bzw.  $\frac{1}{2i}(\xi - \frac{1}{\xi})$  statt  $\sin E$ . Zur Untersuchung der Konvergenz der  $a_{kn}$  sind die Singularitäten der  $h_k(\xi)$  in der  $\xi$ -Ebene zu bestimmen. Man findet, dass sich von 0 und  $\infty$  verschiedene Singularitäten nur ergeben, wenn  $|\vec{r} - \vec{r}'| = 0$  ist. Legen wir das Koordinatensystem  $x, y, z$  so, dass sich das ungestörte Mobil in der  $x, y$ -Ebene bewegt und die  $x$ -Achse durch das Perizentrum der Mobilbahn geht, so wird

$$\begin{aligned} x &= a (\cos E - e) = a \left( \frac{1}{2} \left[ \xi + \frac{1}{\xi} \right] - e \right), \\ y &= a \sqrt{1-e^2} \sin E = a \sqrt{1-e^2} \frac{1}{2i} \left[ \xi - \frac{1}{\xi} \right], \end{aligned} \quad (85)$$

mit  $a$  und  $e$  als grosse Halbachse und Exzentrizität. Die Striche über  $x$ ,  $y$ ,  $a$ ,  $e$  sind in (85) weggelassen, obwohl es sich eigentlich um die ungestörte Bewegung handelt.  $|\vec{r} - \vec{r}'| = 0$  wird bei festgehaltenem  $\vec{r}'$  eine Gleichung 4. Grades für  $\xi$ , die sich aufspaltet in die 2 Gleichungen zweiten Grades

$$\left[ \frac{a}{2} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) - ae - x' \right] \pm i \cdot \left[ a \sqrt{1-e^2} \frac{1}{2i} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) - y' \right] = 0$$

oder

$$\xi^2 + 1 - 2 \left( e + \frac{x'}{a} \right) \xi + \sqrt{1-e^2} (\xi^2 - 1) - 2i \frac{y'}{a} \xi = 0,$$

$$\xi^2 + 1 - 2 \left( e + \frac{x'}{a} \right) \xi - \sqrt{1-e^2} (\xi^2 - 1) + 2i \frac{y'}{a} \xi = 0$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{1 + \sqrt{1-e^2}} \left( e + \frac{x' + iy'}{a} + \sqrt{\left( e + \frac{x' + iy'}{a} \right)^2 - e^2} \right), \\ \xi_2 &= \frac{1}{1 + \sqrt{1-e^2}} \left( e + \frac{x' + iy'}{a} - \sqrt{\left( e + \frac{x' + iy'}{a} \right)^2 - e^2} \right), \\ \xi_3 &= \frac{1}{1 - \sqrt{1-e^2}} \left( e + \frac{x' - iy'}{a} + \sqrt{\left( e + \frac{x' - iy'}{a} \right)^2 - e^2} \right), \\ \xi_4 &= \frac{1}{1 - \sqrt{1-e^2}} \left( e + \frac{x' - iy'}{a} - \sqrt{\left( e + \frac{x' - iy'}{a} \right)^2 - e^2} \right). \end{aligned} \quad (86)$$

Massgebend für die Konvergenz der  $a_{kn}$  ist die am nächsten beim Einheitskreis liegende Singularität  $\xi_j$ , ( $j=1, \dots, 4$ ). Wegen  $|\xi_4| = \frac{1}{|\xi_1|}$  und  $|\xi_3| = \frac{1}{|\xi_2|}$  genügt es,  $|\xi_1|$  und  $|\xi_2|$  näher zu untersuchen.

Eine Diskussion der Lage der Singularitäten  $\xi_1, \xi_2$  in der  $\xi$ -Ebene für alle möglichen Werte von  $\frac{|x'+iy'|}{a}$  und  $e$  würde zu unübersichtlich. Wir wollen hier nur 2 Fälle betrachten; aus diesen kann man dann leicht extrapolieren, wie sich  $\xi_1$  und  $\xi_2$  allgemein verhalten.

Wenn der Störkörper weit weg ist, also

$$\frac{|x'+iy'|}{a} \gg 1 \quad (87)$$

gilt, liegen  $\xi_1, \xi_3$  ausserhalb,  $\xi_2, \xi_4$  innerhalb des Einheitskreises; wegen  $|\xi_3| > |\xi_1|$  bestimmen daher  $\xi_1, \xi_4$  das Konvergenzgebiet der Reihe (84). Aus (86) kann man entnehmen

$$|\xi_1| \approx \frac{2}{1+\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{|x'+iy'|}{a} \quad (88)$$

(88) zeigt, dass die Konvergenz nicht wesentlich von der Exzentrizität  $e$  sondern hauptsächlich von der Entfernung des Störkörpers abhängt.

Im zweiten Fall wollen wir im Gegensatz zu (87) annehmen, dass der Störkörper sich sehr nahe bei der Mobilbahn befindet, und zwar im Abstand  $\epsilon a$  auf der kleinen Achse der Mobilbahn (Fig. 2).

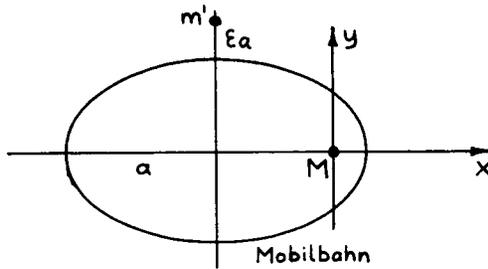


Fig. 2

Die die Konvergenz bestimmenden Singularitäten sind in diesem Fall wieder  $\xi_1, \xi_4$ . Man erhält beim Einsetzen von

$$\frac{x'+iy'}{a} = -e + i \cdot (\sqrt{1-e^2} + \varepsilon)$$

in (86), wenn bzgl.  $\varepsilon$  linearisiert wird,

$$|\xi_1| \approx 1 + \frac{2}{1+\sqrt{1-e^2}} \cdot \varepsilon \quad (89)$$

Die Formel (89) zeigt dieselbe Struktur wie (88). Zusammenfassend hat man daher das Resultat, dass (84) grössenordnungsmässig im Gebiet

$$\frac{a}{a+\varrho} < |\xi| < \frac{a+\varrho}{a}$$

konvergiert, wo  $\varrho$  den Abstand des Störkörpers von der Mobilbahn bezeichnet. Das Konvergenzverhalten der Koeffizienten  $a_{kn}$  ist also gegeben durch

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{|n| \sqrt{|a_{kn}|}}{\sim} \frac{a}{a+\varrho} \quad (90)$$

Damit haben wir einen ungefähren Begriff von der Konvergenz unserer Fourierreihen nach  $E$  bekommen; zur Konvergenz nach  $E_1$  bemerken wir nur, dass diese wegen Formel (59) mit der Konvergenz bzgl.  $E$  verkoppelt ist und schlecht sein wird, wenn  $(\frac{\bar{a}}{a'})^{\frac{3}{2}}$  und zugleich  $\bar{e}$  gross sind (z.B. Störung eines äusseren Planeten mit stark exzentrischer Bahn durch einen innern).

Zum Vergleich wollen wir auch untersuchen, wie es sich mit der Konvergenz verhält, wenn man nach den mittleren Anomalien  $A, A'$  entwickelt. Wir machen dieselben Vereinfachungen wie vorhin und gehen aus von (85)

$$x = a (\cos E - e) ,$$

$$y = a \sqrt{1-e^2} \cdot \sin E ,$$

wobei  $E$  als Funktion von  $A$  aufzufassen ist

$$A = E - e \cdot \sin E \quad (91)$$

Mit der Einführung von  $\eta = \text{cis } A$  werden  $x$  und  $y$  Funktionen von  $\eta$ . Da sich  $x(\eta)$ ,  $y(\eta)$  nicht explizit anschreiben lassen, sondern transzendente Funktionen sind, benützen wir die Hilfsvariable  $\xi = \text{cis } E$ ; die Relation zwischen  $\eta$  und  $\xi$  erhält man aus (91)

$$\begin{aligned} \text{cis } A &= \text{cis} (E - e \cdot \sin E) \quad , \\ \eta &= \xi \cdot \exp\left(-\frac{e}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\right) \quad (92) \end{aligned}$$

Die Singularitäten  $\eta_k$  in der  $\eta$  - Ebene, die das Konvergenzverhalten der Fourierreihe nach  $A$  bestimmen, sind erstens jene, die sich gemäss (92) aus den Singularitäten  $\xi_k$ , ( $k=1,2,3,4$ ) von (86) ergeben, zweitens Verzweigungspunkte, die dort auftreten, wo  $\xi$  und damit die Störungsterme aufhören, eindeutige Funktionen von  $\eta$  zu sein, d.h. wo

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= \exp\left(-\frac{e}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\right) - \xi \cdot \frac{e}{2}\left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{e}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\right) = 0 \quad , \\ 1 - \frac{e}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) &= 0 \quad (93) \end{aligned}$$

ist.

Man erhält dadurch insgesamt 6 Singularitäten

$$\eta_k = \xi_k \cdot \exp\left(-\frac{e}{2}\left(\xi_k - \frac{1}{\xi_k}\right)\right) \quad , \quad (k=1, \dots, 6) \quad (94)$$

wobei  $\xi_1, \dots, \xi_4$  in (86) angeschrieben sind und  $\xi_5, \xi_6$  die Lösungen von (93) sind

$$\begin{aligned} \xi_5 &= \frac{1}{e} (1 + \sqrt{1 - e^2}) \quad , \\ \xi_6 &= \frac{1}{e} (1 - \sqrt{1 - e^2}) \quad . \end{aligned} \quad (95)$$

(95) in (94) eingesetzt gibt

$$\begin{aligned}\eta_s &= \frac{1}{e} (1 + \sqrt{1 - e^2}) \cdot \exp(-\sqrt{1 - e^2}), \\ \eta_6 &= \frac{1}{e} (1 - \sqrt{1 - e^2}) \cdot \exp(\sqrt{1 - e^2}).\end{aligned}\tag{96}$$

Aus (96) sieht man leicht, dass

$$|\eta_s| = \frac{1}{|\eta_6|} \longrightarrow 1 \quad \text{für } e \rightarrow 1,$$

d.h. die Konvergenz der Fourierreentwicklung nach  $A$  wird beliebig schlecht für  $e \rightarrow 1$ . Fig. 3, wo  $\eta_s$  in Funktion von  $e$  aufgetragen ist, gibt noch genaueren Aufschluss.

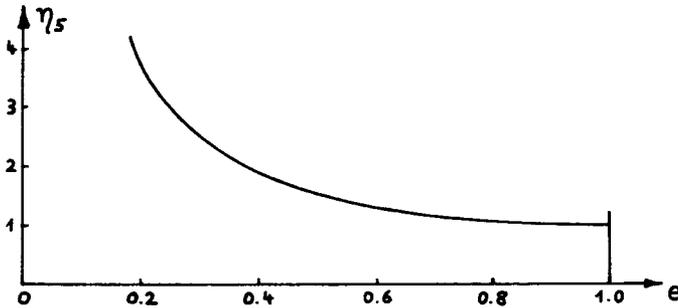


Fig. 3

Beispielsweise ist der Konvergenzfaktor für den noch weit von 1 entfernten Wert  $e = \frac{3}{4}$  höchstens 1.143, also bereits sehr schlecht, und zwar wie weit der Störkörper auch von der Mobilbahn entfernt sei.

Als wesentliches Ergebnis halten wir fest: Im Gegensatz zur Entwicklung nach den mittleren Anomalien in der klassischen Theorie bleibt bei unserer Entwicklung die Konvergenz auch für sehr grosse Exzentrizitäten gut, eine Folge der Einführung der regularisierenden Zeit (vgl. Fussnote Seite 3).

### III. BEISPIELE

#### III.1. Anzahl der mitzunehmenden Glieder

Bei der Anwendung der beschriebenen Theorie in einem konkreten Beispiel muss man sich entschliessen, nach wievielen Gliedern die Reihen abgebrochen werden sollen. Je nach den Gegebenheiten des Beispiels und den Anforderungen, die an die Genauigkeit gestellt werden, wird man die Art und Anzahl der mitzunehmenden Glieder von Fall zu Fall festsetzen; die Untersuchungen in II.3 und II.4. geben einem die Hilfsmittel dazu in die Hand.

Seien die Massen  $M$  und  $m'$  und die grossen Halbachsen  $a$  und  $a'$  gegeben, ferner der kleinste Abstand  $\varrho$  zwischen Mobil- und Störkörperbahn. Die Elemente  $\alpha_i, \beta_i$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), die Zeit  $t$  und die Koordinaten  $x, y, z$  des Mobils sollen im Zeitraum vom Anfangszeitpunkt  $t_0$  bis zur Zeit  $t_0 + T$  auf eine relative Genauigkeit von  $s$  Dezimalstellen aus den abgebrochenen Reihen berechnet werden können. Gesucht sind  $N$ , die Ordnung, bis zu welcher die Störungsrechnung getrieben werden muss, und  $n_1, n_2, \dots, n_N$ , die angeben, wieviele Glieder der Fourierreihen in den Störungsrechnungen 1., 2., ...,  $N$ -ter Ordnung genommen werden müssen. Wenn  $a_{mn}$  die Fourierreihenentwicklungskoeffizienten einer Grösse  $i$ -ter Störungsordnung sind und die Konvergenz nach  $E_i$  von derselben Grösse ist wie nach  $E$ , so sind alle  $a_{mn}$  mit  $|m| < n_i, |n| < n_i$  mitzunehmen.

Zunächst ist nach (29)

$$E_{\max} = E(t_0 + T) \sim T \cdot M^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}} \quad (97)$$

Dann berechnet man  $\frac{m'}{M} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 E_{\max}$ , und nach (81) erhält man wegen  $r \sim a$ ,  $r' \sim a'$

$$10^{-s} \sim \left(\frac{m'}{M} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 E_{\max}\right)^N, \text{ für } N \leq 2 \quad (98)$$

bzw.

$$10^{-5} \sim \left( \frac{m'}{M} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 E_{\max} \right)^2 \cdot \left( \frac{m'}{M} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 E_{\max} \right)^{N-2}, \quad \text{für } N > 2. \quad (99)$$

Aus (98), (99) wird

$$N \approx \left\{ \begin{array}{l} \frac{-s}{\log \left( \frac{m'}{M} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 E_{\max} \right)}, \quad \text{falls } N \leq 2, \\ \frac{-s + 2 \cdot \log E_{\max}}{\log \left( \frac{m'}{M} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 E_{\max} \right)}, \quad \text{falls } N > 2. \end{array} \right. \quad (100)$$

Die Störungen 1. Ordnung müssen eine relative Genauigkeit von

$$\frac{10^{-5}}{\frac{m'}{M} \cdot \left( \frac{a}{a'} \right)^3 \cdot E_{\max}}$$

aufweisen; daher ergibt sich für  $n_1$  wegen (90)

$$\left( \frac{a}{a+g} \right)^{n_1} \sim 10^{-5} / \left( \frac{m'}{M} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 E_{\max} \right),$$

$$n_1 \cdot \log \frac{a}{a+g} \sim -s - \log \left( \frac{m'}{M} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 E_{\max} \right),$$

$$n_1 \sim \left( -s - \log \left( \frac{m'}{M} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 E_{\max} \right) \right) / \log \left( \frac{a}{a+g} \right). \quad (101)$$

Analog erhält man für  $n_2$

$$n_2 \sim \left( -s - 2 \cdot \log \left( \frac{m'}{M} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 E_{\max} \right) \right) / \log \left( \frac{a}{a+g} \right), \quad (102)$$

und für  $i > 2$

$$n_i \sim \left( -s + 2 \cdot \log E_{\max} - i \cdot \log \left( \frac{m'}{M} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 E_{\max} \right) \right) / \log \left( \frac{a}{a+g} \right). \quad (103)$$

Da (100), (101), (102), (103) nur sehr grobe Abschätzungen sind, wird man zur Sicherheit immer etwas mehr Glieder mitnehmen. Vor allem die Abschätzungen für die  $n_i$  sind mit ziemlicher Unsicherheit behaftet wegen des möglichen Auftretens von kleinen Divisoren  $m + n\mu$ ; es ist zweckmässig, vor Beginn der Rechnung zu untersuchen, welche Paare  $m, n$  kritisch sind.

Für grosse Genauigkeit, aber kleine Zeiträume genügen wenige Ordnungen, während die Fourierentwicklungen ziemlich lang sein müssen; für kleinere Genauigkeiten, die aber über lange Zeiten gültig sein sollen, muss man dagegen viele Ordnungen und nur kurze Fourierentwicklungen mitnehmen.

### III.2. Störung der Vesta durch Jupiter

Hansen hat in seiner Störungstheorie [2] nach fast denselben Variablen  $E$  und  $E_1$  entwickelt.  $E_1$  ist dort nach der gleichen Formel (62) linear von  $E$  abhängig. Während aber in unserer Theorie der Zusammenhang zwischen  $E$  und der Zeit  $t$  durch

$$t = \bar{t} + \Delta t = \bar{a}^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} [E - E_0 - \bar{e}(\sin E - \sin E_0)] + \Delta t \quad (104)$$

gegeben ist, definiert Hansen die Variable  $E$  durch

$$t = \bar{a}^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} [E - E_0 - \bar{e}(\sin E - \sin E_0)] \quad (105)$$

Wegen der Kleinheit der Zeitstörung  $\Delta t$  sind in gewissen Fällen die Abweichungen der beiden Entwicklungen so gering, dass sie sich direkt miteinander vergleichen lassen. Als Beispiel eines solchen Vergleichs wählen wir die Störung des Planetoiden Vesta, die M. G. Leveau [3] nach der Hansenschen Theorie berechnet hat. Wir begnügen uns dabei mit den Störungen 1. Ordnung durch Jupiter.

Nach Leveau sind die auf die Ekliptik bezogenen Keplerschen Elemente der Vesta am 17.0 Dezember 1856

grosse Halbachse $a$	=	2.360632
Exzentrizität $e$	=	0.09018838
Neigung gegen die Ekliptik $i$	=	$7^{\circ} 8'11.3''$
mittlere Länge $E$	=	$84^{\circ}43'54.5''$
Länge des Perihels $\tilde{\omega}$	=	$250^{\circ}47'34.5''$
Länge des aufst. Knotens $\Omega$	=	$103^{\circ}20'30.6''$

und jene von Jupiter zur selben Zeit

$a'$	=	5.202800	$E'$	=	$11^{\circ}37'56.0''$
$e'$	=	0.04824471	$\tilde{\omega}'$	=	$12^{\circ} 1'41.3''$
$i'$	=	$1^{\circ}18'39.9''$	$\Omega'$	=	$99^{\circ} 0'30.0''$

Transformiert man auf ein Koordinatensystem, dessen  $x, y$  -Ebene die Ebene der ungestörten Vestabahn ist und deren  $x$  -Achse in die Richtung des aufsteigenden Knotens dieser Ebene in der Ekliptik zeigt, und rechnet man dann gemäss 1.2. in diesem Koordinatensystem auf die Elemente in unserer regularisierten Theorie um, so erhält man

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha}_1 &= -0.410693863 & \bar{\beta}_1 &= 1.539942916 \\
 \bar{\alpha}_2 &= -1.406791020 & \bar{\beta}_2 &= 0.449565782 \\
 \bar{\alpha}_3 &= \bar{\alpha}_4 = \bar{\beta}_3 = \bar{\beta}_4 = 0 \\
 E_0 &= 3.364899463 \text{ (Bogenmass)} & & (106)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha'_1 &= -1.547336614 & \beta'_1 &= -1.661216304 \\
 \alpha'_2 &= 1.591417857 & \beta'_2 &= -1.632308654 \\
 \alpha'_3 &= -0.000010209 & \beta'_3 &= -0.002812378 \\
 \alpha'_4 &= 0.157895638 & \beta'_4 &= 0.172419588 \\
 E'_0 &= -0.007260196 \text{ (Bogenmass)}
 \end{aligned}$$

Die Masse von Jupiter ist  $m' = 0.0009523810$ , falls die Sonnenmasse  $M = 1$  gesetzt wird.

Für  $\mu = \left(\frac{M+m'}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha'}\right)^{\frac{3}{2}}$  ergibt sich

$$\mu = 0.305768995 ;$$

$m + n\mu$  wird klein in den Fällen

1 -	3 · $\mu$	=	0.082693015
3 -	10 · $\mu$	=	-0.057689950
4 -	13 · $\mu$	=	0.025003065
11 -	36 · $\mu$	=	-0.007683820
37 -	121 · $\mu$	=	0.001951605

⋮

Für absolut kleine  $m, n$ , d.h. so weit wie die Reihenglieder in der praktischen Rechnung mitgenommen werden, treten also keine Resonanzen auf.

Die harmonische Analyse der Ausdrücke  $f_k(\vec{\sigma}, E), \left. \frac{\partial f_3}{\partial \Delta_k} \right|_{\vec{\Delta}=\vec{\sigma}}, (k=1, \dots, 9)$  führen wir nach dem folgenden Verfahren aus. Wir unterteilen das  $E$  -Intervall  $[0, 2\pi]$  durch  $j_1$  äquidistante  $E$  -Werte, analog das  $E_1$  -Intervall  $[0, 2\pi]$  durch  $j_2$   $E_1$  -Werte, und werten  $f_k(\vec{\sigma}, E), \left. \frac{\partial f_3}{\partial \Delta_k} \right|_{\vec{\Delta}=\vec{\sigma}}, (k=1, \dots, 9)$  für jedes Paar solcher  $E$  und  $E_1$  -Werte, insgesamt also  $j_1 \cdot j_2$  mal, aus. Setzen wir nun für  $f_k(\vec{\sigma}, E)$  und  $\left. \frac{\partial f_3}{\partial \Delta_k} \right|_{\vec{\Delta}=\vec{\sigma}}$  Fourierpolynome mit entsprechend vielen Gliedern an, so erhalten wir Gleichungssysteme von  $j_1 \cdot j_2$  Gleichungen mit  $j_1 \cdot j_2$  Unbekannten, deren Lösungen wegen Orthogonalität der Gleichungsmatrizen trivial sind. Die so berechneten Koeffizienten der Fourierpolynome sind Approximationen für die Koeffizienten der Fourierreihen, und zwar umso bessere, je grösser  $j_1$  und  $j_2$  gewählt werden.

Bei den Rechnungen, die alle auf dem Computer durchgeführt wurden, strebten wir eine Genauigkeit der Störungen 1. Ordnung  $(\Delta\alpha_i)_1, (\Delta\beta_i)_1, (i=1, \dots, 4), (\Delta t)_1$  von  $10^{-9}$  an, da auch die ungestörten Elemente  $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i$  in (106) mit dieser Genauigkeit gegeben sind.

Bei der harmonischen Analyse war eine Einteilung mit etwa  $j_1 = j_2 = 30$  notwendig; Proberechnungen mit noch feineren Einteilungen haben alle Koeffizienten nur noch um weniger als  $10^{-9}$  geändert, die Koeffizienten der säkularen Glieder sogar um weniger als  $10^{-11}$ . Wie nach (68) zu erwarten, wurde in der Zeitstörung der Koeffizient des Gliedes mit  $E^2$  absolut kleiner als die Genauigkeitsgrenze  $10^{-11}$ . Die berechneten Reihen stellen also, bei alleiniger Berücksichtigung der Störungen 1. Ordnung von Jupiter, die Elemente  $\alpha_i, \beta_i, (i=1, \dots, 4)$  und die zugehörige Zeit  $t$  in einem Bereich  $|E - E_0| \leq 10^2$  mit einer Genauigkeit von  $10^{-9}$  dar. Das entspricht, da die Elemente von der Größenordnung 1 sind, einer Genauigkeit von 9 Dezimalstellen. Der Bereich  $|E - E_0| \leq 10^2$  entspricht mehr als 30 Umläufen der Vesta oder etwa 100 Jahren. Zur Kontrolle wurden die Reihen für einen bestimmten Wert von  $E$  ausgewertet und die Resultate mit jenen verglichen, die man durch numerische Integration des Differentialgleichungssystems (37) erhält. Für den willkürlich gewählten Wert  $E - E_0 = 10$  ergab die Auswertung der Reihen

$$\begin{array}{ll}
 \Delta \alpha_1 = -0.000139481 & \Delta \beta_1 = -0.000864979 \\
 \Delta \alpha_2 = -0.001210486 & \Delta \beta_2 = -0.000522608 \\
 \Delta \alpha_3 = 0.000121955 & \Delta \beta_3 = 0.000098771 \\
 \Delta \alpha_4 = 0.000037030 & \Delta \beta_4 = 0.000065985
 \end{array} \quad (107)$$

$$\Delta t = 0.016868508,$$

während die numerische Integration von (37) nach Runge-Kutta mit der Schrittweite  $\Delta E = 0.1$  lieferte

$$\begin{array}{ll}
 \Delta \alpha_1 = -0.000136567 & \Delta \beta_1 = -0.000865016 \\
 \Delta \alpha_2 = -0.001208237 & \Delta \beta_2 = -0.000522281 \\
 \Delta \alpha_3 = 0.000121811 & \Delta \beta_3 = 0.000098681 \\
 \Delta \alpha_4 = 0.000037035 & \Delta \beta_4 = 0.000066004
 \end{array} \quad (108)$$

$$\Delta t = 0.016826298.$$

Der Unterschied zwischen (107) und (108), der abgesehen von  $\Delta \alpha_4$  in der Grössenordnung von 1 ‰ liegt, rührt hauptsächlich davon her, dass die Störungen höherer als 1. Ordnung in (107) nicht enthalten sind. Nach (81) sind nämlich die Störungen 2. Ordnung von der Grössenordnung

$$(\Delta_k)_2 \sim \frac{m'}{M} \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 E \cdot (\Delta_k)_1 \sim 10^{-3} \cdot (\Delta_k)_1, \quad (k=1, \dots, 8),$$

$$(\Delta t)_2 \sim \frac{m'}{M} \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 E^2 \cdot (\Delta t)_1 \sim 10^{-2} \cdot (\Delta t)_1.$$

Der relativ grössere Unterschied bei  $\Delta \alpha_4$  ist dadurch zu erklären, dass  $\Delta \alpha_4$  bei  $E - E_0 = 10$  zufällig gerade absolut klein ist.

Bei einem Vergleich mit den Rechnungen von Leveau kann man nicht einfach die Störungen irgend einer Grösse  $g$  miteinander vergleichen. Im allgemeinen ist die Störung in unserem Sinne

$$\Delta g = g(t) - \bar{g}(\bar{t}) = g(t) - \bar{g}(t - \Delta t)$$

völlig verschieden von der in der Hansenschen Theorie, wo die Zeit nicht gestört ist,

$$\Delta g = g(t) - \bar{g}(t).$$

Nur wenn  $\bar{g}(t - \Delta t) = \bar{g}(t)$  ist, sind die beiden Störungen gleich, und die Reihenentwicklungen stimmen dann wegen der fast gleichen Definitionen von  $\bar{E}$  in beiden Theorien ungefähr überein. Von den drei Störungen, die Leveau in [3] angibt, hat die dritte, die Störung  $\Delta z$  senkrecht zur ungestörten Bewegung in der  $x, y$ -Ebene, diese Eigenschaft, denn es ist  $\bar{z} \equiv 0$ . Wir wollen deshalb unsere Reihenentwicklung von  $\Delta z$  mit der Leveauschen vergleichen. Aus (4) und (32) erhält man, unter Vernachlässigung der in den Elementenstörungen quadratischen Glieder, und indem man beachtet, dass  $\bar{\alpha}_3 = \bar{\alpha}_4 = \bar{\beta}_3 = \bar{\beta}_4 = 0$  ist,

$$\begin{aligned} \Delta z = z = & [\bar{\alpha}_1 \Delta \alpha_3 + \bar{\beta}_1 \Delta \beta_3 + \bar{\alpha}_2 \Delta \alpha_4 + \bar{\beta}_2 \Delta \beta_4] \\ & + [\bar{\alpha}_1 \Delta \alpha_3 - \bar{\beta}_1 \Delta \beta_3 + \bar{\alpha}_2 \Delta \alpha_4 - \bar{\beta}_2 \Delta \beta_4] \cdot \cos E \\ & + [\bar{\alpha}_1 \Delta \beta_3 + \bar{\beta}_1 \Delta \alpha_3 + \bar{\alpha}_2 \Delta \beta_4 + \bar{\beta}_2 \Delta \alpha_4] \cdot \sin E. \end{aligned} \quad (109)$$

Nun werden die vorhin berechneten Reihen für die Elementstörungen in (109) eingesetzt. Das Resultat ist die in Tafel 1 dargestellte Reihe für  $\Delta z$ . Zur Erklärung dieser Tafel sei folgendes bemerkt. Um nur mit reellen Zahlen zu tun zu haben, ist statt nach  $\text{cis}(mE+nE_1)$ , ( $-\infty < m, n < \infty$ ) nach  $\cos(mE+nE_1)$  und  $\sin(mE+nE_1)$ , ( $0 \leq m < \infty, -\infty < n < \infty$ ) entwickelt. Man erhält dadurch die Reihe

$$\begin{aligned} \Delta z = & [a_0 + a_1 \cos E + b_1 \sin E] \cdot (E - E_0) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_{mn} \cos(mE+nE_1) + b_{mn} \sin(mE+nE_1)] , \end{aligned}$$

wobei  $E_1 = \mu E + c = 0,305768995 \cdot E - 1,041898899$  ist. Die Koeffizienten  $a_0, a_1, b_1$  sind in Tafel 1 oben in der Zeile "säkulare Glieder = . . ." mit dem Faktor  $10^5$  multipliziert angeschrieben; in den mit  $E, E_1, \cos, \sin$  überschriebenen Kolonnen stehen  $m, n, 10^5 \cdot a_{mn}, 10^5 \cdot b_{mn}$ . Alle nicht angeschriebenen Koeffizienten  $a_{mn}, b_{mn}$  sind absolut kleiner als  $10^{-9}$ .

Tafel 2 ist die Reihe von Leveau, die aus [3] entnommen wurde bis auf die folgenden drei Aenderungen. Erstens sind die Koeffizienten an unsere Masseneinheiten angepasst worden, zweitens tragen Aenderungen am konstanten Glied und an den 2 Gliedern  $\cos E$  und  $\sin E$  von  $\Delta z$  dem Umstand Rechnung, dass Leveau mittlere Elemente zugrunde legt, d.h. die konstanten Teile der Störungen zu den ungestörten Elementen nimmt, und schliesslich sind die von Leveau angegebenen Glieder mit dem Faktor  $nt$  auf Glieder nach  $E$  umgeschrieben gemäss der Beziehung

$$nt = E - E_0 - \bar{e}(\sin E - \sin E_0) .$$

TAFEL 1

Störung der Vesta durch Jupiter

Störung 1. Ordnung senkrecht zur Bahnebene \*  $10^5$

$$\text{Säkulare Glieder} = \left( \begin{array}{l} .186820 \\ -2.071445 * \cos(E) \\ -1.490556 * \sin(E) \end{array} \right) * (E - E_0)$$

Periodische Glieder:

E	E <sub>1</sub>	cos	sin	E	E <sub>1</sub>	cos	sin
( 0, 0)		-.7722					
( 0, 1)		3.5987	.5329				
( 0, 2)		2.0370	2.3332				
( 0, 3)		.5239	2.7909				
( 0, 4)		.0687	-.1572				
( 0, 5)		.0099	-.0054				
( 0, 6)		.0011	.0002				
( 0, 7)		.0001	.0001				
( 0, 8)		-.0000	.0000				
( 0, 9)		-.0000	.0000				
( 1, -10)		.0000	.0000	( 2, -11)		-.0000	.0000
( 1, -9)		.0000	.0000	( 2, -10)		-.0011	.0001
( 1, -8)		.0000	.0005	( 2, -9)		.0014	.0010
( 1, -7)		-.0061	.0095	( 2, -8)		.0017	.0052
( 1, -6)		.0589	-.0202	( 2, -7)		-.0081	.0331
( 1, -5)		.1390	.0416	( 2, -6)		-.0320	-.0088
( 1, -4)		.4270	.4627	( 2, -5)		-.3529	-.0515
( 1, -3)		-.8175	.5418	( 2, -4)		-2.3746	-1.6263
( 1, -2)		-2.9960	5.3870	( 2, -3)		8.6125	14.5980
( 1, -1)		-1.5848	2.0729	( 2, -2)		.4051	1.1003
( 1, 0)		17.0211	17.0197	( 2, -1)		.5858	1.3978
( 1, 1)		1.5839	-.4755	( 2, 0)		-.1234	.2722
( 1, 2)		.1468	.0936	( 2, 1)		-.0329	.0140
( 1, 3)		.0065	.0201	( 2, 2)		-.0044	-.0023
( 1, 4)		-.0009	.0024	( 2, 3)		-.0002	-.0007
( 1, 5)		-.0003	.0002	( 2, 4)		.0001	-.0001
( 1, 6)		-.0000	-.0000	( 2, 5)		.0000	-.0000
( 1, 7)		-.0000	-.0000	( 2, 6)		.0000	.0000

E	E <sub>1</sub>	cos	sin	E	E <sub>1</sub>	cos	sin
( 3, -12)		.0000	.0001	( 4, -13)		.0001	.0001
( 3, -11)		-.0001	.0002	( 4, -12)		.0000	-.0001
( 3, -10)		-.0023	.0009	( 4, -11)		.0004	-.0007
( 3, -9)		-.0010	-.0012	( 4, -10)		.0201	-.0090
( 3, -8)		-.0065	-.0154	( 4, -9)		-.0203	-.0031
( 3, -7)		.0288	-.2190	( 4, -8)		-.0256	-.0213
( 3, -6)		-.3975	.5230	( 4, -7)		-.0242	-.0630
( 3, -5)		-.5865	.2746	( 4, -6)		.0127	-.1229
( 3, -4)		-.7128	.0073	( 4, -5)		.0749	-.1345
( 3, -3)		-.1908	-.0055	( 4, -4)		.0239	-.0485
( 3, -2)		-.3100	-.0486	( 4, -3)		.0564	-.0662
( 3, -1)		-.0332	-.0556	( 4, -2)		.0164	.0015
( 3, 0)		.0034	-.0086	( 4, -1)		.0009	.0022
( 3, 1)		.0014	-.0004	( 4, 0)		-.0002	.0003
( 3, 2)		.0002	.0001	( 4, 1)		-.0001	.0000
( 3, 3)		.0000	.0000	( 4, 2)		-.0000	-.0000
( 3, 4)		-.0000	.0000	( 4, 3)		-.0000	-.0000
( 5, -14)		.0000	-.0000	( 6, -14)		.0000	-.0000
( 5, -13)		-.0017	-.0011	( 6, -13)		.0001	.0000
( 5, -12)		-.0003	-.0006	( 6, -12)		.0003	.0003
( 5, -11)		.0002	-.0013	( 6, -11)		.0003	.0011
( 5, -10)		.0022	-.0025	( 6, -10)		-.0008	.0030
( 5, -9)		.0081	-.0026	( 6, -9)		-.0047	.0052
( 5, -8)		.0192	.0036	( 6, -8)		-.0115	.0048
( 5, -7)		.0292	.0218	( 6, -7)		-.0140	.0006
( 5, -6)		.0228	.0372	( 6, -6)		-.0065	.0011
( 5, -5)		.0110	.0144	( 6, -5)		-.0088	-.0021
( 5, -4)		.0084	.0258	( 6, -4)		-.0001	-.0012
( 5, -3)		-.0030	.0030	( 6, -3)		.0002	-.0001
( 5, -2)		-.0006	-.0003	( 6, -2)		.0000	.0000
( 5, -1)		-.0000	-.0001	( 6, -1)		.0000	.0000
( 5, 0)		.0000	-.0000	( 6, 0)		-.0000	.0000
( 5, 1)		.0000	-.0000				
( 7, -14)		-.0000	.0000	( 8, -14)		.0000	-.0001
( 7, -13)		-.0002	.0000	( 8, -13)		.0002	-.0001
( 7, -12)		-.0005	-.0002	( 8, -12)		.0005	-.0001
( 7, -11)		-.0009	-.0009	( 8, -11)		.0011	.0003
( 7, -10)		-.0008	-.0026	( 8, -10)		.0014	.0011
( 7, -9)		.0006	-.0045				

E	$E_1$	cos	sin	E	$E_1$	cos	sin
( 7, -8)		.0021	-.0043	( 8, -9)		.0010	.0014
( 7, -7)		.0008	-.0024	( 8, -8)		.0007	.0007
( 7, -6)		.0022	-.0022	( 8, -7)		.0002	.0011
( 7, -5)		.0003	.0002	( 8, -6)		-.0001	-.0000
( 7, -4)		-.0001	.0001	( 8, -5)		-.0000	-.0000
( 7, -3)		-.0000	.0000	( 8, -4)		.0000	-.0000
( 7, -2)		-.0000	-.0000	( 8, -3)		.0000	-.0000
( 9, -14)		.0000	.0001	( 10, -14)		-.0001	-.0001
( 9, -13)		-.0001	.0002	( 10, -13)		-.0000	-.0002
( 9, -12)		-.0003	.0003	( 10, -12)		.0000	-.0003
( 9, -11)		-.0006	.0003	( 10, -11)		.0001	-.0002
( 9, -10)		-.0006	.0001	( 10, -10)		.0000	-.0001
( 9, -9)		-.0004	-.0001	( 10, -9)		.0001	-.0001
( 9, -8)		-.0004	-.0001	( 10, -8)		-.0000	.0000
( 9, -7)		.0000	-.0000	( 10, -7)		-.0000	.0000
( 9, -6)		.0000	.0000	( 10, -6)		-.0000	-.0000
( 9, -5)		.0000	.0000				
( 11, -14)		.0001	.0000	( 12, -14)		-.0000	.0000
( 11, -13)		.0001	.0001	( 12, -13)		-.0000	.0000
( 11, -12)		.0001	.0001	( 12, -12)		-.0000	.0000
( 11, -11)		.0000	.0000	( 12, -11)		-.0000	-.0000
( 11, -10)		.0000	.0001	( 12, -10)		.0000	.0000
( 11, -9)		-.0000	-.0000	( 12, -9)		.0000	.0000
( 11, -8)		.0000	-.0000				

TAFEL 2

Störung der Vesta durch Jupiter

Störung erster Ordnung senkrecht zur Bahnebene nach Leveau [3], zum Vergleich mit Tafel 1.

(Die angeschriebenen Koeffizienten sind mit  $10^{-5}$  zu multiplizieren.)

Säkulare Glieder:  $0.18681 (E - E_0) - 2.07132 (E - E_0) \cos E - 1.49044 (E - E_0) \sin E$

Periodische Glieder:

E	E <sub>1</sub>	cos	sin	E	E <sub>1</sub>	cos	sin
0	0	-0.77		3	-8	-0.01	-0.02
0	1	3.59	0.54	3	-7	0.03	-0.22
0	2	2.04	2.33	3	-6	-0.40	0.53
0	3	0.53	2.79	3	-5	-0.58	0.27
0	4	0.07	-0.16	3	-4	-0.71	0.01
0	5	0.01	-0.01	3	-3	-0.19	0.00
				3	-2	-0.31	-0.05
1	-7	-0.01	0.01	3	-1	-0.03	-0.06
1	-6	0.06	-0.02	3	0		-0.01
1	-5	0.14	0.05				
1	-4	0.44	0.47	4	-10	0.02	-0.01
1	-3	-0.82	0.54	4	-9	-0.02	
1	-2	-3.00	5.39	4	-8	-0.02	-0.02
1	-1	-1.59	2.07	4	-7	-0.02	-0.07
1	0	17.02	17.01	4	-6	0.01	-0.13
1	1	1.59	-0.47	4	-5	0.08	-0.14
1	2	0.15	0.09	4	-4	0.02	-0.05
1	3	0.01	0.02	4	-3	0.06	-0.07
				4	-2	0.01	
2	-8		0.01				
2	-7	-0.01	0.03	5	-9	0.01	
2	-6	-0.03	-0.01	5	-8	0.02	
2	-5	-0.35	-0.06	5	-7	0.03	0.02
2	-4	-2.38	-1.63	5	-6	0.02	0.03
2	-3	8.62	14.59	5	-5	0.01	0.01
2	-2	0.40	1.10	5	-4	0.01	0.02
2	-1	0.58	1.40				
2	0	-0.13	0.27	6	-9		0.01
2	1	-0.03	0.01	6	-8	-0.01	
				6	-7	-0.01	
				6	-6	-0.01	
				6	-5	-0.01	

Ein Vergleich der Tafeln 1 und 2 zeigt die weitgehende Uebereinstimmung der beiden Reihen.

### III.3. Einfluss der Exzentrizität auf die Konvergenz

In II.4. haben wir gesehen, dass die Exzentrizität der Mobilbahn keinen grossen Einfluss hat auf die Schnelligkeit der Konvergenz der Fourierreihen, insbesondere dass sogar für Kollisionsbahnen die Konvergenz gut bleibt. Wir illustrieren das hier an zwei Beispielen.

Die Zentralkörpermasse sei  $M = 1$ , der Störkörper mit der Masse  $m' = 10^{-2}$  beschreibe in beiden Beispielen eine Kreisbahn um  $M$  in der  $x, y$  - Ebene mit dem Radius 1 (Figur 4).

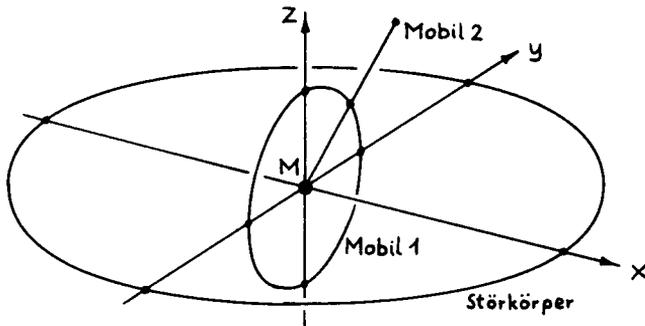


Fig. 4

Das ungestörte Mobil bewege sich im ersten Beispiel (Mobil 1) auf einer Kreisbahn um  $M$  in der  $y, z$  - Ebene mit dem Radius  $\bar{a} = \frac{1}{4}$ , also einer Bahn mit der Exzentrizität  $\bar{e} = 0$ . Im zweiten Beispiel, einer Kollisionsbahn, bewege sich das ungestörte Mobil (Mobil 2) auf der Winkelhalbierenden der  $y$ - und der  $z$ -Achse zwischen  $M$  und dem Punkt  $(x, y, z) = (0, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$ ; die Exzentrizität ist hier  $\bar{e} = 1$  und die grosse Halbachse wie oben  $\bar{a} = \frac{1}{4}$ .

Nach der Regularisierung ergeben sich als Bahnelemente des Mobils

$$\text{Mobil 1 : } \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_4 = 0, \quad \bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_3 = 0, \quad \bar{\beta}_2 = -\bar{\beta}_4 = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

(Halbachse  $\bar{a} = \frac{1}{4}$ , Exzentrizität  $\bar{e} = 0$ ),

Mobil 2 :  $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_3 = \bar{\alpha}_4 = 0$ ,  $\bar{\beta}_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\bar{\beta}_2 = \bar{\beta}_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,  $\bar{\beta}_4 = 0$ ,  
 (Halbachse  $\bar{\alpha} = \frac{1}{4}$ , Exzentrizität  $\bar{e} = 1$ ).

Ferner sei zur Zeit  $t = 0$   $(x'_0, y'_0, z'_0) = (1, 0, 0)$  und  $E_0 = 0$ . Nach (90) ist als Konvergenzfaktor in einer festen Zeile in beiden Beispielen etwa  $\frac{a}{a+g} \approx \frac{1}{4}$  zu erwarten.

Tafel 3 zeigt die Reihe für  $(\Delta\alpha_1)_1$ , die repräsentativ ist auch für die andern Störungen, für das Mobil 1 ( $\bar{e} = 0$ ). Wegen der Besonderheiten des Beispiels verschwinden die Koeffizienten der säkularen Störung und aller Sinusglieder, sodass  $(\Delta\alpha_1)_1$  eine Reihe der Form

$$(\Delta\alpha_1)_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} \cdot \cos(mE + nE_1)$$

wird. Die Bezeichnung in Tafel 3 sei an einem Beispiel erklärt: Im Schnittpunkt der Kolonne (3,K) und der Zeile (J,-7) steht das  $10^9$ -fache des Koeffizienten  $a_{3,-7}$ .

Tafel 4 stellt das entsprechende zu Tafel 3 für das Mobil 2 ( $\bar{e} = 1$ ) dar; hier verschwindet von  $(\Delta\alpha_1)_1$  nur der Koeffizient der säkularen Störung, weshalb Cosinus- und Sinusglieder aufgeführt sind.

Ein Vergleich der beiden Tafeln bestätigt, soweit sich das aus dem Zahlenmaterial ersehen lässt, die theoretischen Erwartungen.







turverzeichnis

- [1] P. Kustaanheimo and E. Stiefel: Perturbation Theory of Kepler Motion Based on Spinor Algebra, Journal f. reine u. ang. Math., Band 218, 1965, S. 204 - 219.
- [2] P.A. Hansen: Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten, Abh. I, II, III - Abh. der K.S. Ges. der Wiss. III, IV, V, Leipzig 1857 - 1861.
- [3] M.G. Leveau: Théorie du mouvement de Vesta, Ann. de l'obs. de Paris, Mémoires, Tome XV, 1880.
- [4] M. Rössler: Numerische Erfahrungen bei der Störungsrechnung in der Himmelsmech. mit der Methode der Spinor-Regularisierung, Zeitschrift f.ang. Math. u. Physik, Band 16, 1965, S. 395 - 402.
- [5] K. Sundman: Mémoire sur le probleme des 3 corps, acta math., 36, 1912.
- [6] D. Belorizky: Sur la convergence des séries dans la solution du probleme des 3 corps par M. Sundman, comptes rendus de l'acad. des sciences, Tome 193, 1931, p. 314 - 316.
- [7] E.T. Whittaker: Prinzipien der Störungstheorie und allgem. Theorie der Bahnkurven in dyn. Problemen, Enz. d. math. Wiss., Band VI, 2, A, 1912, S. 512 - 556.
- [8] J.L. Lagrange: Mémoire de l'acad. de Berlin, 1776.
- [9] H. Poincaré: Méthodes nouvelles de la méc. cél., Tome I, p. 285 - 334.

## Curriculum vitae

Ich wurde am 7. Januar 1940 in Porto (Portugal) geboren. Meine Eltern kehrten aber bald darauf mit mir in die Schweiz zurück, sodass ich den grössten Teil der Jugend in Goldach (Kt. St. Gallen) verbrachte. Nach der Primar- und Sekundarschule besuchte ich das Realgymnasium der Kantonsschule St. Gallen und schloss dort im Herbst 1959 mit der B-Matura ab. Anschliessend trat ich in die Abteilung IX der Eidgenössischen Technischen Hochschule ein und erwarb hier nach vier Jahren das Diplom Richtung Mathematik. Seither bin ich Assistent am Institut für angewandte Mathematik bei Prof. Dr. E. Stiefel, bei dem ich schon die Diplomarbeit ausgeführt habe.